OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	Markoff Process with Stationary uniform distribution
Author(s)	吉田, 耕作
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 189, p. 534-541
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74750
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

819. Markoff Process with stationary uniform distribution

吉田耕作 (阪大)

(0, 1) ノ点 x ガ単位時間ノ後ニ (0, 1) ノ点 y ニ移ル遷移確率ヲ $p(x, y)$ トシ, $p(x, y)$ ニ依ッテ定義サレル simple + Markoff chain ヲ考ヘル: 即チ n 単位時間ノ後ニ点 x ガ点 y ニ移ル遷移確率 $p^{(n)}(x, y)$ ガ ($n = 1, 2, \cdots\cdots$)

$$(1)\quad p^{(n)}(x, y) = \int_0^1 p^{(n-1)}(x, z)\, p(z, y)\, dz$$

$$(p^{(1)}(x, y) = p(x, y))$$

ニヨッテ與ヘラレル transition process ヲ考ヘル. デアル. 勿論 analysis ヲ遂行スルタメニ $p(x, y)$ ハ $0 \leqq x, y \leqq 1$ デ可測ト假定シテヲク。定義カラ

$$(2)\quad p^{(n)}(x, y) \geqq 0 \qquad \text{且ツ} \int_0^1 p^{(n)}(x, y)\, dy \equiv 1$$

$$(n = 1, 2, \cdots\cdots)$$

以下ニハ

$$\boxed{(3)\quad \int_0^1 p(x, y)\, dx \equiv 1}$$

ヲ假定スル。從ッテ勿論

$$(3')\quad \int_0^1 p^{(n)}(x, y)\, dx \equiv 1 \qquad (n = 1, 2, \cdots\cdots)$$

表題= with stationary uniform distribution ト述ベタノハ (3) ガ満足サレテヲルト云フ意味デアル。ソノ理由ヲ次=述ベヨウ。non-negative ナ $f(x)$ ガ

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 1$$

ヲ満足スルナラバ f ハ $(0,1)$ ノ上= total mass 1 ノ mass distribution ヲ定義シテヲルト考ヘテヨイ。n 単位時間後=ハコノ mass distribution ハ $f^{(n)}(y) = \int_0^1 f(x)\,p^{(n)}(x,y)\,dx$ ナル mass distribution =ナル訳デアリ。(3) ハ uniform ナ mass distribution $f(x) \equiv 1$ が時間=對シテ stationary (or steady): $f = f^{(n)}$ $(n = 1, 2, \cdots\cdots)$ ト云フコトヲ意味スル。(3) ハ <u>對稱條件</u>

$$p(x,y) \equiv p(y,x)$$

ガ満サレテヲレバ、(2) =ヨリ、確カ=成立ツ。斯カル遷移確率ノ對稱性ハ量子統計力學=於テハ常=假定スル所ト云フ事デアリマス。

本談話デハ次ノ結果ヲ証明シタイ。

定理1 (3) ヲ満足スル $p(x,y)$ =対シテハ mean ergodic theorem ガ成立スル。即チ $(0,1)$ デ可積分ナ任意ノ $f(x)$ =對シテ同ジク $(0,1)$ デ可積分ナ $f^*(x)$ ガ定リ

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \left| \int_0^1 f(x)\left\{\frac{1}{n}\sum p^{(m)}(x,y)\right\}dx - f^*(y)\right| dy = 0 \tag{4}$$

若シ f ガ non-negative 且ツ

(5) $$\int_0^1 f(x)\,dx = 1,$$

$$\int_0^1 f(x)\log f(x)\,dx = \text{finite}$$

トスレバ

(6) $$\int_0^1 H(f^{(1)}(x))\,dx \geqq \int_0^1 H(f^{(2)}(x))\,dx$$

$$\geqq \cdots\cdots \geqq \int_0^1 H(f^{(n)}(x))\,dx \geqq \cdots\cdots$$

(7) $$H(Z) = Z\cdot\log Z.$$

定理 2 (3)ノ他ニ

(8) $$\begin{cases} \text{或整数 } m \text{ ニ對シテ } \underset{0\leqq x\leqq 1}{g.l.b.}\, p^{(m)}(x,y) = p^{(m)}(y) \\ \text{ガ可測, 且ツ } \int_0^1 p^{(m)}(y)\,dy > 0 \end{cases}$$

ヲ假定スルナラバ

(9) $$\underset{f}{l.u.b.} \int_0^1 \left| f^{(n)}(x) - 1 \right| dx \leqq \frac{2}{(1+\varepsilon)^n}$$

$$(n = 1, 2, \cdots\cdots)$$

ナル如キ正數 ε ガ定ル。コヽニ $\underset{f}{l.u.b.}$ ハ non-negative 且ツ $\int_0^1 f(x)\,dx = 1$ ナル如キ全テノ f ニ對スル l.u.b. ヲ表ス。

注意 1. 擴張サレタ symmetry condition (3)ノ他ニ<u>ミカケ上ハ</u> $p(x,y)$ ノ regularity ニ關シテ何モ假定シナイデ M.E.T. ガ成立ツコトハ一寸面白イト思ヒ

マス。角谷君ニ之ヲ才話シタ所，J. L. Doob ノ論法 (Trans. Am. Math. Soc. 44, 1 (1938)) ヲ modify スレバ

$$\int_0^1 f(x)\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} p^{(m)}(x,y)\,dx$$

ノ弱収斂が出ルコト従ツテ M.E.T. ニヨツテ強収斂が出ルコトテ注意サレタ。所ガ Doob ノ論法ナルモノハ無限次ノ積空間ヲ作リ此所デ Birkhoff ノ ergodic theorem ヲ使フノデアル。無限次ノ積空間ヲ作ルノハ B.E.T. ニ於ケル measure preserving ナ変換（従ツテ inverse が存在ス）ヲ考ヘ得ンガタメデアル。結局 M.E.T. ヲ使フナラバ定理1ノ証明（以下ニ述ベル）ノ如ク直接 M.E.T ヲ使ツタ方が早イ様デアリマス。

注意 2. 條件 (8) ハ一種ノ irreducibility ト考ヘテヨイ。即チ (0, 1) ガ二ツノ部分 A, B ニ分レテ

$$x\in A,\ y\in B \quad 又ハ \quad x\in B,\ y\in A$$

ナルトキ

$$p(x,y)=0$$

ト假定スレバ (8) ハ満足サレナイノデアリマス。

注意 3. $\int_0^1 f(x)\,dx=1$, $\int_0^1 f(x)\log f(x)\,dx=$ finite ナル non-negative ナ $f(x)$ ヲ $x\in(0,1)$ ノ weight ト考ヘ，各 $x\in(0,1)$ ハ或 physical system ノ possible state ヲ表ハスモノトスル。stationarity ト irreducibility ト ((3) ト (8) ト)

ヲ假定スルナラバ n 單位時間後ノ weight $f^{(n)}(x)$ ハ，initial weight $f(x)$ ノ如何ニ関ラズ，uniform weight ニ (6) 及ビ (9) ヲ満足スル如ク收斂スル。之レガ定理 1, 2 カラ言ヘテヲル訳デ，Gibbs ノ H－定理ノ一ツノ解釈ガ Markoff chain ヲ用ヒテ與ヘラレタト考ヘ得ヤウト思ヒマス。

定理1ノ証明　$(0,1)$ ヲ可積分ナ函數 $f(x)$ ノ作ル Banach 空間ヲ (L) トシマス：$\|f\| = \int_0^1 |f(x)|\,dx$. $p(x,y)$ ガ (L) ノ (L) 内ヘノ norm 1 ノ線型作用素 T：

$$T\cdot f = g,\quad g(y) = \int_0^1 f(x)\,p(x,y)\,dx$$

ヲ定メルコトハ，Fubini－Tonelli ノ定理ニヨリ

$$\int_0^1 dy \left| \int_0^1 f(x)\,p(x,y)\,dx \right| \le \int_0^1 dx \int_0^1 |f(x)|\,p(x,y)\,dy$$

$$= \int_0^1 |f(x)|\,dx$$

カラ明ラカデアリマス。又 (3) ニヨレバ T ハ (L) ノ中ノ有界可測ナ函數 $f(x)$ ヲ同ジク有界可測ナ函數ニ寫シ然モ $\operatorname{ess.max}_x |f(x)| \ge \operatorname{ess.max}_x |f^{(n)}(x)|$. ヨッテ有界且可測ナ $f(x)$ ニ對シテハ

$$f_n = \frac{T + T^2 + \cdots + T^n}{n} \cdot f$$

ハ equi-bounded 従ッテ equi-integrable. 故ニ Lebesgue-Riesz ノ定理ニヨリ $\{f_n\}$ ハ (L) ノ或ル点 f^* ニ弱収斂スル部分列 $\{f_{n_i}\}$ ヲ含ム。然ラバ M.E.T. ニヨリ[1], $\{f_n\}$ ハ f^* ニ強収斂スル。故ニ有界可測ナ f ニ對シテハ (4) が成立スル。所ガ (L) ノ中デ有界可測ナ函數ハ strongly dense ダカラ T ノ norm 1 ト云フコトカラ全テノ $f\in(L)$ ニ対シテ (4) が成立スルコトガ云ヘル。

次ニ (6) ノ証明。 f, p ガ全テ連続函數ナルトキハ (3) ト H(z) ノ凸函数ナルコトヲ用ヒ

$$\int_0^1 H(f(x))\,p(x,y)\,dx \geqq H\left\{\int_0^1 f(x)\,p(x,y)\,dx\right\}$$

之ヲ y ニ関シテ積分シ, (2) ヲ用ヒルト

$$\int_0^1 H(f(x))\,dx \geqq \int_0^1 H(f^{(1)}(x))\,dx,$$

即チ, コノ場合ノ (6) ガ得ラレタ。一般ノ場合ハ limit ヲモッテ行ッテ出来ルカラ略ス。普通ノ教科書ニハ Lebesgue integral ニ関シテ凸函數ノ諸性質ヲ出シテナイ様デアルカラ、チャントヤッテミナケレバナラナイケレドモ

---

(1) M.E.T. ノ証明 (談話) ヲミレバ $\|T^n\|\leqq$ 常数 ($n=1,2,\cdots\cdots$) ナルトキ, 或 f ニ對シ $\left\{\frac{T+\cdots\cdots+T^n}{n}\cdot f\right\}$ ガ或 f^* ニ弱収斂スル部分列ヲ含メバ $\frac{T+\cdots\cdots+T^n}{n}f$ ガ f^* ニ強収斂スルト云フ結果ガ得ラレルコトガワカル。

定理2ノ証明　先ヅ

$$(10)\begin{cases}\displaystyle\int_0^1\left|f^{(m)}(y)-1\right|dy\leqq(1-\alpha)\int_0^1\left|f(x)-1\right|dx\leqq 2(1-\alpha)\\ \displaystyle\alpha=\int_0^1 p^{(m)}(y)\,dy\quad(>0\ \text{By}\ (8))\end{cases}$$

ガ得ラレル。何者，$f(x)\geqq 0$，$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=1$ 及ビ (3) ニヨリ

$$\int_{f(x)\geqq 1}(f(x)-1)\,dx=-\int_{f(x)<1}(f(x)-1)\,dx,$$

$$f^{(m)}(y)-1=\int_0^1 f(x)p^{(m)}(x,y)\,dx-1=\int_0^1(f(x)-1)p^{(m)}(x,y)\,dx$$

$$=\int_{f(x)\geqq 1}(f(x)-1)p^{(m)}(x,y)\,dx+\int_{f(x)<1}(f(x)-1)p^{(m)}(x,y)\,dx$$

ヲ得ルカラ

$$\int_{f(x)\geqq 1}(f(x)-1)(p^{(m)}(x,y)-p^{(m)}(y))\,dx\leqq f^{(m)}(y)-1$$

$$\leqq\int_{f(x)\geqq 1}(f(x)-1)(p^{(m)}(x,y)-p^{(m)}(y))\,dx.$$

之レヲ y ニツイテ積分シ (2) ト α ノ定義カラ (10) ヲ得ル．

(10) ヲ繰返シテ

$$\int_0^1\left|f^{(nm)}(x)-1\right|dx\leqq 2(1-\alpha)^n\qquad(n=1,2,\cdots\cdots)$$

故ニ (2), (3) ニヨリ (9) ヲ得ル。

—— 以上 ——