



Title	Markoff Process with Stationary uniform distribution
Author(s)	吉田, 耕作
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 189, p. 534-541
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74750
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

819. Markoff Process with stationary uniform distribution

吉田耕作 (阪大)

(0, 1) の点 x が単位時間 1 後 = (0, 1) の点 y = 移ル遷移確率ヲ $p(x, y)$ トシ, $p(x, y)$ = 依ツテ定義サレル simple + Markoff chain ヲ考ヘル: 即チ n 単位時間 1 後 = 点 x が点 y = 移ル遷移確率 $p^{(n)}(x, y)$ が ($n=1, 2, \dots$)

$$(1) \quad p^{(n)}(x, y) = \int_0^1 p^{(n-1)}(x, z) p(z, y) dz$$

$$(p^{(1)}(x, y) = p(x, y))$$

= ヨツテ與ヘラレル transition process ヲ考ヘルヲデアル. 勿論 analysis ヲ遂行スルタメ = $p(x, y)$ の $0 \leq x, y \leq 1$ テ可測ト假定シテヲク. 定義カラ

$$(2) \quad p^{(n)}(x, y) \geq 0 \quad \text{且ツ} \quad \int_0^1 p^{(n)}(x, y) dy = 1$$

$$(n=1, 2, \dots)$$

以下 =

$$(3) \quad \int_0^1 p(x, y) dx = 1$$

ヲ假定スル. 従ツテ勿論

$$(3') \quad \int_0^1 p^{(n)}(x, y) dx = 1 \quad (n=1, 2, \dots)$$

表題 = with stationary uniform distribution
ト述べタノハ (3) が満足サレテヲルト云フ意味デアル。ソノ
理由ヲ次ニ述べヨウ。 non-negative + $f(x)$ が

$$\int_0^1 f(x) dx = 1 \text{ ヲ満足スルナラバ } f \text{ は } (0, 1) \text{ 上ニ}$$

total mass 1 の mass distribution ヲ定義シテヲ
ルト考ヘテヨイ。 n 單位時間後ニハコノ mass distri-
bution ハ $f^{(n)}(y) = \int_0^1 f(x) p^{(n)}(x, y) dx$ ナル
mass distribution ニナル訳デアリ、(3) ハ uni-
form + mass distribution $f(x) \equiv 1$ が時間ニ
對シテ stationary (or steady): $f = f^{(n)}$ ($n =$
 $1, 2, \dots$) ト云フコトヲ意味スル。(3) ハ 對稱條件

$$p(x, y) \equiv p(y, x)$$

が満サレテアレバ、(2) ニヨリ、確カニ成立ツ。斯カル遷移
確率ノ對稱性ハ量子統計力学ニ於テハ常ニ假定スル所ト云フ
事デアリマス。

本談話デハ次ノ結果ヲ証明シタイ。

定理 1 (3) ヲ満足スル $p(x, y)$ ニ對シテハ mean
ergodic theorem が成立スル。即チ $(0, 1)$ デ可積分
ナ任意ノ $f(x)$ ニ對シテ同ジク $(0, 1)$ デ可積分ナ $f^*(x)$
ガ定リ

$$(A) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \left| \int_0^1 f(x) \left\{ \frac{1}{n} \sum p^{(n)}(x, y) \right\} dx - f^*(y) \right| dy = 0$$

若シ f が non-negative 且ツ

$$(5) \quad \int_0^1 f(x) dx = 1,$$

$$\int_0^1 f(x) \log f(x) dx = \text{finite}$$

トスレバ

$$(6) \quad \int_0^1 H(f^{(1)}(x)) dx \geq \int_0^1 H(f^{(2)}(x)) dx$$

$$\geq \dots \geq \int_0^1 H(f^{(n)}(x)) dx \geq \dots$$

$$(7) \quad H(Z) = Z \cdot \log Z.$$

定理 2 (3)ノ他 =

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{或整数 } m = \text{對シテ } g.l.b. \ p^{(m)}(x, y) = p^{(m)}(y) \\ \quad \quad \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \text{が可測, 且ツ } \int_0^1 p^{(m)}(y) dy > 0 \end{array} \right.$$

ヲ假定スルナラバ

$$(9) \quad l.u.b. \int_0^1 |f^{(n)}(x) - 1| dx \leq \frac{2}{(1+\varepsilon)^n}$$

$$(n = 1, 2, \dots)$$

ナル如キ正數 ε が定ル。コゝ = $l.u.b. \int_0^1$ の non-negative 且ツ $\int_0^1 f(x) dx = 1$ ナル如キ全テノ f = 對スル $l.u.b.$ ヲ示ス。

注意 1. 擴張サレタ symmetry condition (3)ノ他 = ミカケ上ノ $p(x, y)$ ノ regularity = 関シテ何モ假定シナイデ M. E. T. が成立ツコトハ一寸面白イト思ヒ

マス。角谷君 = 之ヲオ話し所, J. L. Doob, 論法 (Trans. Am. Math. Soc. 44, 1 (1938)) ヲ modify ス
レバ

$$\int_0^1 f(x) \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n p^{(m)}(x, y) dx$$

ノ弱収斂が出来るコト從ツテ M.E.T. = ヨツテ強収斂が出来るコトヲ注意サレタ。所ガ Doob ノ論法ナルモノハ無限次ノ積空間ヲ作り此所デ Birkhoff ノ ergodic theorem ヲ使フノデアアル。無限次ノ積空間ヲ作ルノハ B.E.T. = 於ケル measure preserving + 変換 (從ツテ inverse が存在ス) ヲ考ヘ得ンガタメデアアル。結局 M.E.T. ヲ使フナラバ定理 1 ノ証明 (以下 = 述ベル) ノ如ク直接 M.E.T. ヲ使ツタ方が早イ様デアリマス。

注意 2. 條件 (8) ハ一種ノ irreducibility ト考ヘテヨイ。即チ $(0, 1)$ ガニツノ部分 A, B = 分レテ

$$x \in A, y \in B \quad \text{又ハ} \quad x \in B, y \in A \quad \text{ナルトキ} \\ p(x, y) = 0$$

ト假定スレバ (8) ハ満足サレナイノデアリマス。

$$\text{注意 3. } \int_0^1 f(x) dx = 1, \quad \int_0^1 f(x) \log f(x) dx =$$

finite + 非負 + $f(x)$ が $x \in (0, 1)$ ノ weight ト考ヘ, 各 $x \in (0, 1)$ ハ或 physical system ノ possible state ヲ表ハスモノトスル。stationarity ト irreducibility ト ((3) ト (8) ト)

ヲ假定スルナラバ n 単位時間後ノ weight $f^{(n)}(x)$ ハ,
initial weight $f(x)$ ノ如何ニ関ラズ, uniform
weight = (6) 及ビ (9) ヲ満足スル如ク収斂スル。之レガ
定理 1, 2 カラ言ヘテアル訳デ, Gibbs ノ H-定理ノ一
ツノ解釈ガ Markoff chain ヲ用ヒテ與ヘラレタト考
ヘ得ヤウト思ヒマス。

定理 1 ノ証明 $(0, 1)$ ヲ可積分ト函数 $f(x)$ ノ作
ル Banach 空間ヲ (L) トシマス: $\|f\| = \int_0^1 |f(x)| dx$.
 $p(x, y)$ ガ (L) ノ (L) 内ヘノ norm 1 ノ線型作用
素 T :

$$T \cdot f = g, \quad g(y) = \int_0^1 f(x) p(x, y) dx$$

ヲ定メルコトハ, Fubini - Tonelli ノ定理ニヨ
リ

$$\begin{aligned} \int_0^1 dy \left| \int_0^1 f(x) p(x, y) dx \right| &\leq \int_0^1 dx \int_0^1 |f(x)| p(x, y) dy \\ &= \int_0^1 |f(x)| dx \end{aligned}$$

カラ明ラカデアリマス。又 (3) = ヨレバ T ハ (L) ノ中
ノ有界可測ト函数 $f(x)$ ヲ同ジク有界可測ト函数ニ寫シ
然モ $\text{ess. max}_x |f(x)| \geq \text{ess. max}_x |f^{(n)}(x)|$. ヨッ
テ有界且可測ト $f(x)$ = 對シテハ

$$f_n = \frac{T + T^2 + \dots + T^n}{n} \cdot f$$

ハ *equi-bounded* 従ッテ *equi-integrable*.
 故 = *Lebesgue-Riesz* ノ定理 = ヨリ $\{f_n\}$ ハ (L)
 , 或ル点 f^* = 弱収斂スル部分列 $\{f_{n_i}\}$ ヲ含ム。然ラバ
 M. E. T. = ヨリ⁽¹⁾, $\{f_n\}$ ハ f^* = 強収斂スル。故 = 有界可
 測ナ f = 對シテハ (4) が成立スル。所ガ (L) ノ中デ有界可
 測ナ函数ハ *strongly dense* タカラ T ノ *norm 1*
 ト云フコトカラ全テノ $f \in (L)$ = 對レテ (4) が成立スルコト
 が云ヘル。

次 = (6) ノ証明。 f, p が全テ連続函数ナルトキハ (3)
 ト $H(2)$ ノ凸函数ナルコトヲ用ヒ

$$\int_0^1 H(f(x)) p(x, y) dx \geq H\left\{\int_0^1 f(x) p(x, y) dx\right\}$$

之ヲ $y =$ 関シテ積分シ, (2) ヲ用ヒルト

$$\int_0^1 H(f(x)) dx \geq \int_0^1 H(f''(x)) dx,$$

即チ, コノ場合ノ (6) が得ラレタ。一般ノ場合ハ *limit*
 = モツヲ行ッテ出来ルカラ略ス。普通ノ教科書ニハ *Lebesgue*
integral = 関シテ凸函数ノ諸性質ヲ出レテナイ様
 デアルカラ、チヤントヤッヲミナケレバナラナイケレドモ

(1) M. E. T. ノ証明 (談話)ヲミレバ $\|T^n\| \leq$ 常数 ($n =$
 $1, 2, \dots$) ナルトキ, 或 f = 對シ $\left\{\frac{T + \dots + T^n}{n} \cdot f\right\}$ が
 或 f^* = 弱収斂スル部分列ヲ含メバ $\frac{T + \dots + T^n}{n} f$ が f^*
 = 強収斂スルト云フ結果が得ラレルコトがワカル。

定理 2 の証明

先ず

$$(10) \begin{cases} \int_0^1 |f^{(m)}(y) - 1| dy \leq (1-\alpha) \int_0^1 |f(x) - 1| dx \leq 2(1-\alpha) \\ \alpha = \int_0^1 p^{(m)}(y) dy (> 0 \text{ By (8)}) \end{cases}$$

が得られる。何者、 $f(x) \geq 0$, $\int_0^1 f(x) dx = 1$ 及び (3)
= 3 1)

$$\begin{aligned} \int_{f(x) \geq 1} (f(x) - 1) dx &= - \int_{f(x) < 1} (f(x) - 1) dx, \\ f^{(m)}(y) - 1 &= \int_0^1 f(x) p^{(m)}(x, y) dx - 1 = \int_0^1 (f(x) - 1) p^{(m)}(x, y) dx \\ &= \int_{f(x) \geq 1} (f(x) - 1) p^{(m)}(x, y) dx + \int_{f(x) < 1} (f(x) - 1) p^{(m)}(x, y) dx \end{aligned}$$

ヲ得ルカラ

$$\begin{aligned} \int_{f(x) < 1} (f(x) - 1) (p^{(m)}(x, y) - p^{(m)}(y)) dx &\leq f^{(m)}(y) - 1 \\ &\leq \int_{f(x) \geq 1} (f(x) - 1) (p^{(m)}(x, y) - p^{(m)}(y)) dx. \end{aligned}$$

之レヲ $\mathcal{F}$ = ツイテ積分シ (2) ト α の定義カラ (10) ヲ得ル。

(10) ヲ繰返シテ

$$\int_0^1 |f^{(nm)}(x) - 1| dx \leq 2(1-\alpha)^n \quad (n=1, 2, \dots)$$

故 $(2), (3) = \exists \mid (9) \neq \text{得} \vee$ 。

—— 以上 ——