



Title	V. Šmulian : Banach空間 ノ Principle of inclusionニ就イテ, I
Author(s)	樋口, 順四郎
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 189, p. 541-550
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74751
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

820. V. Šmulian: Banach 空間ノ
Principle of inclusion = 就イテ, I

樋口 順四郎 (阪大)

Banach 空間 E が regular (reflexive トモ呼バレル) ナタメノ條件ヲ求メルコトハ多クノ人ニヨツテ試ミラレテキル。⁽¹⁾ シカシ未ダ完全ニ解決ガツイタトハ言ヘヌ様ニ思ハレル。今ココニ紹介スル V. Šmulian ノ論文 *O principe vkladok v prostranstve tipa (B)* (On the principle of inclusion in the space of the type (B)). *Recueil Math.* 5 (1939) 317-327. モ regularity ノ條件ヲ論ジテキルガ、結果モ、方法モ D. Milman ノソレ⁽²⁾ニ比シテ本質的ナ前進ヲナシタワケデハナイ。議論カラ transfinite ナ考ヘヲナレベク除クコトハ好マシイコトデアルガ、コノ論文ハ transfinite = 終始スル。

(1) 角谷静夫氏ノ談話 1785. 参照

(2) D. Milman: On some criteria for the regularity of spaces of the type (B) C. R. URSS. 20 (1938)

II. $\mathcal{O}$ ハ 端 = 直前ノ 数ヲ 持タヌ 任意ノ 超限数ヲ 表ハス
ト 約束スル。transfinite sequence $\{x_\xi\}$ ($1 \leq \xi$
< $\mathcal{O}$) が 興ヘラレタトキ, アル所カヲ 先ノ elementsヲ
含ム convex, closed set ノ 何レモ 含マレルヲ $\mathcal{O}$ ノ
element x_0 ガ アレバ $\{x_\xi\}$ ハ $x_0 = \mathcal{O}$ -converge
スルト云フ。(記号デ $x_\xi \xrightarrow{\mathcal{O}} x_0$) 集合 $M \subset E$ ノ element
ノ 任意ノ sequence $\{x_\xi\}$ ガ アレバ, ソレニ 對シテ $x_\xi \xrightarrow{\mathcal{O}} x_0$
トナル $x_0 \in E$ ヲ 見出セルトキ = M ハ $\mathcal{O}$ -complete デ
アルト云フ。

Lemmas. ヲ 順次ニ 片ヅケル。

Lemma 1 $\{x_\xi\}$ ($1 \leq \xi < \mathcal{O}$) ハ convex, closed
set K = 属スル 点ノ transfinite sequence トス
ル。モシ スベテノ $f \in \overline{E}$ = 對シ

$$\lim_{\xi \rightarrow \mathcal{O}} f(x_\xi) \leq f(x_0) \leq \overline{\lim_{\xi \rightarrow \mathcal{O}} f(x_\xi)}$$

ヲ ミタス x_0 ガ 存在スレバ $x_0 \in \mathbb{R}$ 。

証: $x_0 \in \mathbb{R}$ トスレバ, 内点ヲ 有シ且ツ x_0 ヲ 含マヌ
convex, closed set $K' \supset K$ ヲ 見出セル。 θ ハ K'
ノ 内点ト 考ヘ得ル。然ルトキハ $t_0, 0 < t_0 < 1$ ガ 存在シテ
 $t_0 x_0$ ガ K' ノ 境界上ニ 来ル。 $t_0 x_0$ ヲ 通ル K' ノ strictly
hyperplane ヲ $f_0(x) = 1$ トスルト $f_0 \in \overline{E}$ デ $x \in K' =$
對シテハ $f_0(x) \leq 1$ ⁽²⁾。從ツテ

$$f_0(x_0) \leq \overline{\lim_{\xi \rightarrow \mathcal{O}} f_0(x_\xi)} \leq 1$$

脚註(2) 次頁ヘ

一方 $f_0(t_0 x_0) = 1$, $f_0(x_0) = \frac{1}{t_0} > 1$ (矛盾)

Lemma 2 スベテ $f \in \bar{E} =$ 對シテ

$$\lim_{\xi \rightarrow \psi} f(x_\xi) \leq f(x_0) \leq \overline{\lim_{\xi \rightarrow \psi} f(x_\xi)} \quad \text{トナルタメノ完全條件}$$

ハ任意 $\varepsilon_0 > 0$, $\xi_0 < \psi =$ 對シテ

$$\left\| \sum_{i=1}^N \mu_i x_{\xi_i} - x_0 \right\| < \varepsilon_0 \quad (1)$$

トナル linear combination $\sum_{i=1}^N \mu_i x_{\xi_i}$ ($N > 0$, $\mu_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^N \mu_i = 1$, $\xi_i \geq \xi_0$) が存在スルコトデアル。

証: “必要” ハ明ラカ ($\xi \geq \xi_0$ デアル x_ξ ノスベテヲ含ム最小ノ convex, closed set K トスレバ Lemma 1 カラ $x_0 \in K$)

“充分” ト云フ = ハ: アル f_0 ($\|f_0\| = 1$) = 對シテ

$\overline{\lim_{\xi \rightarrow \psi} f_0(x_\xi)} < f_0(x_0)$ ト假定スルト, $\varepsilon_0 > 0$, $\xi_0 < \psi$ が

アツテ

$$f_0(x_\xi) < f_0(x_0) - \varepsilon_0 \quad \text{for } \xi_0 < \xi < \psi$$

ユ ε_0 , ξ_0 = 對シテ (1) ヲ満足スル $\sum_{i=1}^N \mu_i x_{\xi_i}$ ヲ作レバ

(2) Banach 空間ノ convex set = ツイテハ下記参照。

S. Mazur: Über konvexe Menge in linearen normierten Räume. *Studia Math.* 4.

$$\begin{aligned}\varepsilon_0 &\geq \left| \sum_1^N \mu_i f_0(x_{\xi_i}) - f_0(x_0) \right| = \left| \sum_1^N \mu_i [f_0(x_{\xi_i}) - f_0(x_0)] \right| \\ &> \sum_1^N \mu_i \varepsilon_0 = \varepsilon_0 \quad (\text{終})\end{aligned}$$

Lemmas 1, 2 カラ容易 =

$$\boxed{\text{Lemma 3}} \quad \lim_{\xi \rightarrow \vartheta} f(x_\xi) \leq f(x_0) \leq \overline{\lim_{\xi \rightarrow \vartheta} f(x_\xi)}$$

がスベテノ $f \in \overline{E} =$ 對シテ成立スルコトト $x_\xi \xrightarrow{\vartheta} x_0$ トハ
同値デアアル。(3)

$\boxed{\text{Lemma 4}}$ E ノ unit sphere が ϑ -complete
+ タメノ 完全條件ハ有界ノ convex, closed set ノ 任意
ノ descending transfinite sequence

$$K_1 \supseteq K_2 \supseteq \cdots \supseteq K_\xi \supseteq \cdots \quad (1 \leq \xi < \vartheta) \quad (2)$$

= 共通ノ点が存在スルコトデアアル。

証: “必要” K_ξ ノ勝手ノ element $\exists x_\xi$ トスル。
 $\|x_\xi\| \leq 1$ ト考ヘテヨイ。

ϑ -complete だから x_ξ が ϑ -conv. スル element
 x_0 が存在スル。ユノ x_0 ハ明カ = スベテノ K_ξ = 共通ノ点
デアアル。

“充分” $\{x_\xi\}_{\xi < \vartheta}$ $\|x_\xi\| \leq 1$ が與ヘラレタ K_η $\exists$
 $\eta \leq \xi < \vartheta$ トナル x_ξ $\exists$ 含ム最小ノ conv. closed set
トスルト, $K_1 \supseteq K_2 \supseteq \cdots \supseteq K_\xi \supseteq \cdots \quad (1 \leq \xi < \vartheta)$.

(3) S. Mazur: loc. cit. 参照。

ソコデハ weak convergence が同様ノコトヲ論ジテアル。

假定カラ，コレハ共通ノ点 x_0 ガアル。 $\mathcal{V}$ -conv. ノ定義カラ $x_3 \xrightarrow{\mathcal{V}} x_0$. (終)

コレヲノ Lemmas ト A. Plessner ノ定理⁽⁴⁾，即チ： E ガ regular ナタ $x = \wedge$ unit sphere $\|x\| \leq 1$ ガ transfinitely closed⁽⁵⁾ ナコトガ必要且充分デアアル，ヲ使ヘバ次ノ定理ヲウル。

定理 1 E ガ regular ナタ x ノ完全條件ハ任意ノ有界ナ convex, closed set ノ減少系列

$$K_1 \supseteq K_2 \supseteq \dots \supseteq K_\xi \supseteq \dots \quad (1 \leq \xi < \mathcal{V})$$

ニ共通ノ点ガ存在スルコトデアアル。

定理 2 E ガ locally weakly compact ナタ $x = \wedge$ ，unit sphere ガ ω -complete ナコトガ必要且充分デアアル。コ $\omega = \omega$ ハ最初ノ infinite transf. number デアル。

証： 条件ガ必要ナコトハ明ラカデアアルカラ充分ナコトヲ証明スレバヨイ。先ヅ E ガ separable ナトキニ証明スル。 $\{f_m\}$ ヲ E デ weakly dense ナ系列トスル。系列 $\{x_n\}$ ($\|x_n\| \leq 1$) ノ中カラ適當ニ部分列 $\{x_{n_\nu}\}$ ヲ選ンデ，スベテノ $f_m = \lim_{\nu} f_m(x_{n_\nu})$ ガ存在

(4) V. Gautmakhen et Šmulian: Sur les espaces linéaires dont la sphère unitaire est faiblement compacte. C.R. URSS. 20 参照。

(5) x_0 ガ存在シテ ($\|x_0\| \leq 1$) $\lim f(x_\xi) \leq f(x_0) \leq \overline{\lim} f(x_\xi)$ for all $f \in E$ トナルコト。

スル様ニデキル。 $y_\nu = x_{n_\nu}$ ($\nu = 1, 2, \dots$) ト書ケバ,
 E ハ ω -complete デアルカラ $y_\nu \xrightarrow{\omega} x_0$ トナル x_0
 が存在スル。コノ $x_0 = y_\nu$ が弱収斂スルコトヲ示サウ。モ
 シサウデナイトスルト、アル $f_0 \in E = \text{ツイテ } \{f_0(y_\nu)\}$
 ノアル部分列 $\{f(y_{\nu_k})\}$ が (有限モシクハ無限ノ) $f_0(x_0)$
 トハ等シクナイ極限ヲ持ツトイフコトが起ル。 $z_k = y_{\nu_k}$
 ($k = 1, 2, \dots$) ト書ケバ

$$\lim_k f_m(z_k) = f_m(x_0), \quad \lim_k f_0(z_k) \neq f_0(x_0) \quad (3)$$

假定カラ $z_k \xrightarrow{\omega} x'_0$ トナル x'_0 が存在スルが、コノ x'_0
 = 對シテ

$$f_m(x'_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(z_k) = f_m(x_0) \quad (\text{by (3)})$$

$$f_0(x'_0) = \lim_k f_0(z_k) \neq f_0(x_0) \quad (4)$$

$\{f_m\}$ ハ weakly dense = トツテアルカラ (4) ハ矛盾
 盾デアル。

E が separable デナイ場合ニハ $\{x_n\}$ ノ張ル
 closed linear hull E_1 トスレバ E_1 ハ se-
 parable subspace デ、 ω -completeness ハ保存
 サレル。故ニ $\{x_n\}$ ハ E_1 デ weakly compact, 従
 ツテ又 E デモ weakly compact デアル。 (終)
 コノ定理ト Lemma 4 トカラ直チニ

[定理3] E が locally weakly compact

トタメニハ 有界 convex, closed sets ノ減少可附番

系列

$$K_1 \supseteq K_2 \supseteq \cdots \supseteq K_n \supseteq \cdots$$

= 共通点が存在スルコトが必要且ツ充分ナル。

注意 定理 1, 3 カラ直チ=次ノコトが分ル。

《regular + Banach 空間ハ locally weakly compact ナル》⁽⁶⁾

又 separable + 距離空間デハ閉集合ノ整列單調系列ハ高々可附番系列=ナル (Baire ノ定理) カラ次ノ事モ言ヘル所ナル。

《E が separable + regularity ト locally weakly compactness ハ同値ナル》⁽⁷⁾
(Banach ノ定理)

一般ノ Banach 空間デ regularity ト locally weakly compactness トが同値=ナルカ否カト云フコトハ未解決ナルガコレハ重要ナ問題ナル。

II. regularity = 関スル結果ハ定理 1 デツキテ
キルガ, Šmulian ハ更ニ次ノ定理 (定理 5)ヲ述べテ
キル, 内容ニ於テハ D. Milmann⁽⁸⁾ ノソレト同ジデ
アル。

$\varphi(K)$ ハ有界ナ内点ヲ有スル convex set $K =$
對應スル数トシ $\varphi(K) \geq 0$ 且ツ單調トスル。ソノマウナ φ ノ

(6) Gantmakher et Šmulian: loc. cit.

(7) 角谷氏談話 785. 定理 3.

(8) D. Milmann. loc. cit

一例ハ後ヲ述ベル。

定理4 E が *locally weakly compact* ナラ、アル $\varphi = \varphi_1 \neq \varphi(K_1) = \varphi(K_2) = \dots = \varphi(K_\xi) = \dots$ トナルヲ含テ有界ナ *convex closed set* / 任意ノ *transf. sequence*

$$K_1 \supseteq K_2 \supseteq \dots \supseteq K_\xi \supseteq \dots \quad (1 \leq \xi < \vartheta) \quad (5)$$

ニ共通ノ点ガアルコトガ E / *regular* ナタメノ必要且充分ノ條件デアル。

証: 必要ナコトハ勿論デアル。充分ナコトヲ証明スルニハ、何ラノ制限ノナシ (5) ノ形ノ *sequence* = 共通点ガアルコトヲ言ヘバヨイ。

ϑ ガ $\xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_n < \dots$ デアル様ナ $\{\xi_n\}$ ノ極限トシテ定義サレテキル場合ニハ *locally weakly compact* ノ假定カラ

$$K_{\xi_1} \supseteq K_{\xi_2} \supseteq \dots \supseteq K_{\xi_n} \supseteq \dots$$

ハ共通ノ点ガ存在スル。

ξ ノ極限トスル $\{\xi_n\}$ ガ存在シナイ場合ニハ $\lim_{\xi \rightarrow \vartheta} \varphi(K_\xi) = \varphi_0$ トオケバ、適当ナ ξ_1 ガ定マツテ $\xi > \xi_1$ ナラ $|\varphi(K_\xi) - \varphi_0| < 1$ トナル。一般ニ ξ_n ガキマツテ $\xi > \xi_n$ ナラ $|\varphi(K_\xi) - \varphi_0| < \frac{1}{n}$ トナル。
 $\lim \xi_n = \xi_0$ トスルト φ ハ單調デアルカラ $\xi > \xi_0$ ナラ $\varphi(K_\xi) = \varphi_0$ トナル。故ニコノトキ

$$K_1 \supseteq K_2 \supseteq \dots \supseteq K_\xi \supseteq \dots \supseteq K_{\xi_0} \supseteq \dots$$

ニハ共通点ガアル。(終)

次ニ $Q \ni \theta \ni$ 内点ニ持ッ *convex closed set* トスル。 $g(x)$ Q ノ境界上デハ $1 =$ ナリ任意ノ $x =$ 對シテハ $g(tx) = tg(x)$ ($t \geq 0$) トナル *functional* トスル (例ヘバ *Minkowski functional*) $g(x)$ ハスベテノ $x \in E$ デ意味ヲモツ。

$$\varphi(K) = \frac{\text{fin}}{x \in K} g(x) \quad (6)$$

ト定義スルト $\varphi(K) \geq 0$ 。 $K_1 \supseteq K_2$ ナラ $\varphi(K_1) \leq \varphi(K_2)$ トナル。

定理5 E ハ *locally weakly compact*, Q ハ上述ノ通リトスル。 E ガ *regular* ナラ $x \in Q$ ノ境界上ノ有界ナ *convex closed set*ノ任意ノ減少系列

$$K_1 \supseteq K_2 \supseteq \dots \supseteq K_\xi \supseteq \dots \quad (1 \leq \xi < \infty)$$

ニ共通点ガ存在スルコトガ必要且充分デアアル。

証: 必要ナコトハ勿論、充分ナコトハ、有界ナ *convex, closed set*ノ *sequence*

$$K_1 \supseteq K_2 \supseteq \dots \supseteq K_\xi \supseteq \dots \quad (1 \leq \xi < \infty) \quad (7)$$

ガ共通点ヲモツコトヲ言ヘバヨイ。明ラカニ $\theta \in K_1$ ト仮定シテヨイ。ソノトキハ (6) デ定義シタ $\varphi =$ ツイテ

$$0 < \varphi(K_1) \leq \varphi(K_2) \leq \dots \text{デアアルカ} (7) = \text{於テハ}$$

$$\varphi(K_1) = \varphi(K_2) = \dots = \varphi(K_\xi) = \dots = 1 \text{ト假}$$

$$\text{定シテヨイ (定理4) } \varphi(K_\xi) = 1 \text{ カラ } K_\xi \cdot Q = K'_\xi \neq \Lambda$$

デアル、仮定カラ

$$K'_1 \supseteq K'_2 \supseteq \cdots \supseteq K'_3 \supseteq \cdots$$

= ハ共通ノ点が存在スル。即チ (9) = ハ空デナイ共通部分ヲ
持ツ。 (終)