



Title	Wiener 及ビ Vitali ノ covering theorem ニ就イテ
Author(s)	角谷, 静夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 189, p. 550-558
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74752
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

821. Wiener 及び Vitali の covering theorem = 就イテ

角 谷 静 夫 (阪大)

N. Wiener の Duke Math. Journal vol. 5 (1939) に於て次ノ定理ヲ証明シテキル。

定理 (Wiener) A ヲ m 次元ノ Euclid 空間 R^m 内ノ有界集合 (必ズシモ measurable デハナイ) トスルトキ、若シ任意ノ $x \in A$ = 対シテ x ヲ中心トスル半径 $r(x) > 0$ ($r(x)$ ハ x ト共ニ変化するコトヲ許スモノトス) ノ sphere $S(x) \equiv S(x, r(x))$ が對應スレバ、 $\{S(x)\}$, $x \in A$ ノ中カラ有限個ノ何レノニツモ互ニ共通点ヲモクヌ sphere $S(x_1), S(x_2), \dots, S(x_n)$ ヲ選ンデ

$$\sum_{i=1}^m m(S(x_i)) > \alpha_m \cdot m^*(A)$$

トナルヲ示スルコトが出来ル。コゝニ $m(S)$ ハ S ノ

measure (即ち volume), $m^k(A)$ は A の outer measure を表はし $m > 0$ は R^m の dimension m に m 依存する constant である。

Wiener は m 個の parameter の ergodic theorem を論じルタメニコの covering theorem を証明したのである。本談話に於ては先づ Wiener の定理の簡単な証明を與へ、次ニコの結果を用いて Vitali の covering theorem を証明して見よう。

以下、証明は Vitali の定理の証明として Banach の証明 (Saks の本に於るもの) より簡単であると云へたが Wiener の定理と Vitali の定理との關係がツクので興味があると思ふ。

Wiener の定理の証明 与えられた $x \in A$ に関する $\gamma(x)$ の上限を ρ とせよ。 $\rho = +\infty$ であるならば定理の明かである故に $\rho < +\infty$ と假定する。 $2^{-n}\rho < \gamma(x) \leq 2^{-n+1}\rho$ を満足する点 x 全体を A_n と表はせば $\{A_n\}$ ($n=1, 2, \dots$) は互に共通点なく且つ $A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$ である。

先づ A_1 を考へれば A_1 は有界である。各点 x は $(\gamma(x) > 2^{-1}\rho)$ の点を中心とする半径 $2^{-1}\rho < \gamma(x) \leq \rho$ である sphere $S(x)$ が對應して居る。今同ジ点 x を中心とする半径

3 $r(x)$ / sphere $S(x, 3r(x))$ を $S'(x) = \tau$ 表
ハスコト=スル。 A_1 より有限個ノ点 $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}$,
ヲトツテ $\{S(x_i^{(1)})\}$ ($i=1, 2, \dots, n$) が互=共通
点ナリ且ツ $A_1 \subset \sum_{i=1}^n S'(x_i^{(1)})$ トナル様=スルコトが出来ル
コトヲ示サシ。

コレヲ示スタメ先ツ $x^{(1)} \in A_1$ ヲ任意=トル。 次=
 $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_p^{(1)}$ が既=定マツタトキ, モシ

$$A_1 \subset \sum_{i=1}^p S'(x_i^{(1)}) \text{ ナケレバ } x_{p+1}^{(1)} \in A_1 - \sum_{i=1}^p S'(x_i^{(1)}) \text{ ヲ任}$$

意=トル。

此ノ如クレテ行ケバ, モシ上=述べタキヲ n_1 が
存在シナイトスルト, コノ operation ハ無限=ツ
ヅケラレテ $\{x_p^{(1)}\}$ ($p=1, 2, \dots$) が定マル。

先ツ任意ノ二ツノ sphere $S(x_p^{(1)}), S(x_q^{(1)})$ が
共通点ヲモタヌコトヲ示サシ。 實際 $p < q$ ナルコトヨ
リ $x_q^{(1)}$ ハ $S'(x_p^{(1)})$ = ハ属シナイカラ

$$\begin{aligned} d(x_p^{(1)}, x_q^{(1)}) &> 3r(x_p^{(1)}) = r(x_p^{(1)}) + 2r(x_p^{(1)}) \\ &> r(x_p^{(1)}) + 2 \cdot \frac{r}{2} \geq r(x_p^{(1)}) + r(x_q^{(1)}) \end{aligned}$$

ヨツテ $S(x_p^{(1)}), S(x_q^{(1)})$ ハ共通点ヲモタナイ。

次=上=述べタキヲ無限=カナル $\{x_p^{(1)}\}$ ($p=$
 $1, 2, \dots$) が定マルト假定シテ矛盾ヲ出サシ。 任意
ノ p = 對シテ $\{S(x_i^{(1)})\}$ ($i=1, 2, \dots, p$) が共通点ヲ
モタヌコトヨリ

$$\sum_{i=1}^p m(S(x_i^{(1)})) = m\left(\sum_{i=1}^p S(x_i^{(1)})\right) \\ \leq m(\cup(A_1, \rho))$$

(但シ $\cup(A_1, \rho) \cap A_1$ の distance が $< \rho$ ナル如キ点全体ノ集合) トナリ右辺ハ $\rho = \infty$ 無関係デアル。シカル = 左辺ノ各項ハ半徑 $r(x_i^{(1)})$ ノ sphere ノ volume デ $r(x_i^{(1)}) > \frac{\rho}{2}$ ガ $i=1, 2, \dots, p$ = 對シテ成立スルカラ $p \rightarrow \infty$ ナラシムレバ矛盾ヲ生ジル。ヨツテ n_1 ガ存在シテ

$$A_1 \subset \sum_{i=1}^{n_1} S'(x_i^{(1)})$$

トナル。

此ノ如クシテ所要ノ $\{x_i^{(1)}\}$ ($i=1, 2, \dots, n_1$)
が見ツカッタ。

次ニ一般ニ $\{x_i^{(R)}\}$ ($i=1, 2, \dots, n_R; R=1, 2, \dots, p$) が既ニ定マツテ $\{S(x_i^{(K)})\}$ ($i=1, 2, \dots, n_K; K=1, 2, \dots, p$) ノ任意ノ二ツハ互ニ共通点ヲモタズ、且ツ

$$\sum_{k=1}^p A_k \subset \sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^{n_k} S'(x_i^{(k)})$$

トナツテキルモトセヨ。

$$A'_{p+1} \equiv A_{p+1} - \sum_{R=1}^p \sum_{i=1}^{n_R} S'(x_i^{(R)})$$

トオキ A'_{p+1} = 對シテ上ト全ク同ジ議論ヲ行ハバ (但シ

$x \in A_1 =$ 對シテ $2^{-1}p < r(x) \leq p$ トナツテモタヘ反シ,
 $x \in A'_{p+1} =$ 對シテハ $2^{-(p+1)}p < r(x) \leq 2^{-p}p$ が成立ス
 ルコト = 注意) $\{x_i^{(p+1)}\}$ ($i=1, 2, \dots, n_{p+1}$) が
 定マツテ $\{S(x_i^{(p+1)})\}$ ($i=1, 2, \dots, n_{p+1}$) ノ任意
 ノ二ハ互ニ共通点ナク且ツ

$$A'_{p+1} \subset \sum_{i=1}^{n_{p+1}} S'(x_i^{(p+1)})$$

トナル。

然ルニ容易ニワカル如ク $\{S_i^{(p+1)}\}$ ($i=1, 2, \dots$
 $\dots, n_{p+1}$) ハ何レモ $\{S(x_i^{(k)})\}$ ($i=1, 2, \dots, n_k$;
 $k=1, 2, \dots, p$) ノ何レトモ共通点ヲモタヌカラ、コレニ
 ヨツテ $\{S(x_i^{(k)})\}$ ($i=1, 2, \dots, n_k$; $k=1, 2, \dots, p+1$)
 が互ニ共通点ヲモタズ、且ツ

$$\sum_{k=1}^{p+1} A_k \subset \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{i=1}^{n_k} S'(x_i^{(k)})$$

トナル如キ点 $\{x_i^{(k)}\}$ ($i=1, 2, \dots, n_k$; $k=1, 2,$
 $\dots, p+1$) が得テレタ。コノマツテ進メバ結局
 $\{x_i^{(k)}\}$ ($i=1, 2, \dots, n_k$; $k=1, 2, \dots$) が
 定マツテ

* 實際 $x_j^{(p+1)}$ ハ $S'(x_i^{(k)})$ = 属シナイカラ

$$d(x_i^{(k)}, x_j^{(p+1)}) > 3r(x_i^{(k)}) = r(x_i^{(k)}) + 2r(x_i^{(k)})$$

$$> r(x_i^{(k)}) + 2 \cdot 2^{-k}p \geq r(x_i^{(k)}) + r(x_j^{(p+1)})$$

($k < p+1$ ナル故)

$$A \subset \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n_k} S'(x_i^{(k)})$$

トナリ、且 $\forall \{S(x_i^{(k)})\} (i=1, 2, \dots, n_k; k=1, 2, \dots)$ ハ何レノニツモ互ニ共通点ヲモタナシ。

ヨツテ

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n_k} m(S(x_i^{(k)})) = \frac{1}{3^m} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n_k} m(S'(x_i^{(k)}))$$

$$\geq \frac{1}{3^m} m^*(A)$$

故ニ $\alpha_m < \frac{1}{3^m}$ デアレバ十分大キイ $p = \text{對シテ}$

$$\sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^{n_k} m(S(x_i^{(k)})) > \alpha_m \cdot m^*(A)$$

コレデ Wiener ノ定理ノ証明ガ終ル。

次ニ Wiener ノ定理ヲ用ヒテ次ノ Vitali ノ定理ヲ証明シヨウ。

定理 (Vitali). $A \subset \mathbb{R}^m$ 内ノ有界集合 (必ズシモ measurable デナシ), $\mathcal{E} = \{E\}$ $\mathbb{R}^m$ ノ閉集合 E ノ family トスル。モシ任意ノ $x \in A$ 及ビ任意ノ $\delta > 0 \Rightarrow$ 對シテ $x \in E$, $E \in \mathcal{E}$ ナル閉集合 E 及ビ $E \subset S$, $\delta(S) < \delta$, $m(E) > \alpha m(S)$ ナル如キ sphere S ガ存在スレバ (但シ $\delta(S)$ ハ S ノ diameter, $\alpha > 0$ ハ定数 $\alpha = \text{無関係ノ定数トス}$), $\mathcal{E} = \{E\}$ ノうちヨリ可附番個ノ互ニ共通点ナキ閉集合 $\{E_n\} (n=$

$1, 2, \dots$) を選んで $m\left(A - \sum_{n=1}^{\infty} E_n\right) = 0$ とナル様 = スル
コトが出来ル。

(注意) Vitali, 定理ハ A が有界デナイトキ及ビ
 $\alpha = \alpha(x) > 0$ が $x = \text{depend}$ スルトキ = 成立スルノ
デアルが、上ノ場合 = 定理ヲ証明シテオケバ十分デア
ル。

証明: 先ヅ α ヲ適當ニカヘレバ上ノ定理ノ條件
= 現ハレル sphere S が x ヲ中心 = モツモノデアキ
カヘ得ラレルコト = 注意スル。實際 x が S ノ中心 = ナ
ツテキナイトキハ (x が S ノ内点ナルコトヨリ) $S \subset S'$
デ $\delta(S') < 2\delta$ ナル如キ x ヲ中心トスル sphere
 S' ヲ作ルコトが出来ル。ヨツテ α ヲ $\frac{\alpha}{2m}$ デオキカヘレ
バ S ノ中心が x デアルト考ヘテ差支ヘナイ。

先ヅ $A_1 = A$ トオキ A_1 ノ各点 $x = \text{對シテ}$ $x \in E(x)$,
 $E(x) \in \mathcal{E}$ ナル閉集合 $E(x)$ ト $E(x) \subset S(x)$,
 $m(E(x)) > \alpha m(S(x))$ ナル sphere $S(x)$
トヲ對應セシメル。Weierstrass ノ定理 = ヨリ $x_1^{(1)}, x_2^{(1)},$
 $\dots, x_{n_1}^{(1)}$ が定マツテ $\{S(x_i^{(1)})\} (i = 1, 2, \dots, n_1)$
ハ何レノニツモ互ニ共通点ヲモタズ、且ツ

$$\sum_{i=1}^{n_1} m(S(x_i^{(1)})) > \alpha_m \cdot m^*(A_1)$$

デアル。閉カ = $\{E(x_i^{(1)})\} (i = 1, 2, \dots, n_1)$
ハ互ニ共通点ヲモタナイ。

次 = 一般 = $\{E(x_i^{(k)})\}, \{S(x_i^{(k)})\} (i=1, 2, \dots, n_k; k=1, 2, \dots, p)$ が既定義サレタト
 千、 $A_{p+1} = A - \sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^{n_k} E(x_i^{(k)})$ トオク。 A_{p+1} ノ各点

ハ開集合 $\sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^{n_k} E(x_i^{(k)})$ ト positive distance

ヲモツカラ各々ノ $x \in A_{p+1}$ = 對シテ $x \in E(x)$,
 $E(x) \in \mathcal{E}$ ナル開集合 $E(x)$ ト $E(x) \subset S(x)$,
 $m(E(x)) > \alpha m(S(x))$, $S(x) \cdot E(x_i^{(k)}) = \Lambda$
 $(i=1, 2, \dots, n_k; k=1, 2, \dots, p)$ ナル sphere
 $S(x)$ トヲ 對應セシナルコトガ出來ル。

コノ $S(x)$ ノ system = 對シテ再ビ Wiener ノ
 定理ヲ用フレバ有限個ノ A_{p+1} ノ点 $x_1^{(p+1)}, x_2^{(p+1)}, \dots$
 $\dots, x_{n_{p+1}}^{(p+1)}$ ヲ選ンテ $\{S(x_i^{(p+1)})\} (i=1, 2, \dots, n_{p+1})$
 ハ何レノニツモ互ニ共通点ナリ且ツ

$$\sum_{i=1}^{n_{p+1}} m(S(x_i^{(p+1)})) > \alpha_m \cdot m^k(A_{p+1})$$

トナルヲウ = スルコトガ出來ル。 コノ operation ハア
 ル p = 對シテ A_{p+1} が空集合 = ナラナケレバイクラデモツ
 ヲケルコトガ出來ル。 A_{p+1} が空集合 = ナレバ 定理ハ明ラ
 カニ成立スルカラ、コノ operation ハ無限ニツヅケラレ
 ルト假定シテ差支ナイ。

$\{E(x_i^{(k)})\} (i=1, 2, \dots, n_k; k=1, 2, \dots)$
 ハ明カニ互ニ共通点ヲモタナシ。 ヲツテ

$$m(A - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n_k} E(x_i^{(k)})) = 0$$

トナルコトヲ証明スレバ定理ノ証明ハ完結スル、コノタ
 $x = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \rightarrow \infty$ ナルトキ $m^*(A_k) \rightarrow 0$ トナルコトヲ示セ
 バ十分デアル。シカルニ $\{E(x_i^{(k)})\}$ ($i=1, 2, \dots, n_k$;
 $k=1, 2, \dots$) ハ互ニ共通点ヲモタヌコトヨリ

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n_k} m(S(x_i^{(k)}))$$

$$\leq \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n_k} m(E(x_i^{(k)})) < \infty$$

$$\text{ヨツテ } \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n_k} m(S(x_i^{(k)})) = 0. \text{ 即チ } m^*(A_k) \rightarrow 0$$

が得ラレル。(証明終)