



Title	標數0ノ代數的閉体ノ上ノ單純リイ環ノ分類ニ就イテ
Author(s)	萩野, 修作
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 190, p. 559-580
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74753
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

822. 標数0ノ代數的閉体ノ上ノ單純

リい環ノ分類ニ就イテ¹⁾

荻野 修作 (阪大)

§1. $\mathcal{O}$ $\neq$ characteristic zeroノ代數的閉体,
 $\Delta \neq \mathcal{O} =$ 含マレル有理數体ノ實開擴大体トセヨ. $\mathcal{R} \neq \mathcal{O}$
 ノ上ノ semi-simple Lie ring トシ $\mathcal{R}$; regular
 element $\neq$ 含ム maximal abelian subring
 $\mathcal{G} =$ ヨレル $\mathcal{R}$ ノ分解ヲ

$$\mathcal{R} = \mathcal{G} + e_{\alpha}\mathcal{O} + e_{-\alpha}\mathcal{O} + \dots$$

$$\mathcal{G} = h_1\mathcal{O} + h_2\mathcal{O} + \dots + h_n\mathcal{O}$$

トス. 此処ニ α ハ所謂 $\mathcal{R}$ ハ root $\neq \Delta$ ノ元ヲ係數ニ有
 スル parameter $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ノ上ノ linear form
 $\alpha = \sum_{i=1}^n a_i \lambda_i$ $\neq$ アリ得 root $\alpha =$ 對シテ $-\alpha$ ガ亦
 root トシテ表ハレル。

扱フ $\mathcal{R}$ ノ basis h_i, e_{α} $\neq$ 適當ニ normieren ス
 レバ basis 間ノ計算規則ハ次ノ様ニナル。²⁾

$$[h_i, h_k] = 0, \quad 1 \leq i, k \leq n$$

$$[h, e_{\alpha}] = \alpha \cdot e_{\alpha} \quad \text{即} \quad [h_i, e_{\alpha}] = a_i e_{\alpha}$$

$$[e_{\alpha}, e_{-\alpha}] = h_{\alpha} = -\sum_{i=1}^n a_i h_i$$

1) 吉田氏: リい環論參照。

2) H. WEYL: Theorie der Darstellung kontinuierlicher
 halb-einfacher Gruppen durch lineare
 Transformation II. Math. Zeitschr. 24.

$$[e_\alpha, e_\beta] = N_{\alpha\beta} e_{\alpha+\beta} \text{ for } \alpha+\beta \neq 0$$

此処 = $\alpha+\beta \neq 0$ は root ならば $N_{\alpha\beta} \neq 0$, root でなければ $N_{\alpha\beta} = 0$.

更 = コ / $N_{\alpha\beta}$ の次の関係がミタス。

$$N_{\beta\gamma} = N_{\gamma\alpha} = N_{\alpha\beta} \text{ for } \alpha+\beta+\gamma=0$$

$$N_{\beta\gamma} N_{\alpha\delta} + N_{\gamma\alpha} N_{\beta\delta} + N_{\alpha\beta} N_{\gamma\delta} = 0$$

$$\text{for } \alpha+\beta+\gamma+\delta=0, \beta+\gamma, \gamma+\alpha, \alpha+\beta \neq 0$$

$$N_{\alpha\beta} = N_{-\alpha, -\beta}, \quad N_{\beta\alpha} = -N_{\alpha\beta}$$

更 = スル $\mathcal{R}$, 任意 / ニツ / root α, β に対して

$$\beta - i\alpha, \dots, \beta - \alpha, \beta, \beta + \alpha, \dots, \beta + k\alpha \text{ は root,}$$

$$\beta - (i+1)\alpha, \beta + (k+1)\alpha \text{ は root で } i+1.$$

様 + integer $i, k \geq 0$ が定まるが, 此の特

$$R_{\beta\alpha} = -\frac{(i+1)k}{2} \alpha$$

ト置ける

$$N_{\alpha\beta}^2 = R_{\alpha\beta}$$

扱 = Δ / 元 7 component とスル euclidean metric 7 有する n -dim. vectorspace 7 Δ_n とセヨ。 $\mathcal{R}$, 各 root $\alpha = \sum_{i=1}^n a_i \lambda_i$ に対して Δ_n / vector $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 7 考へれば

$$\alpha\beta = -\sum_{i=1}^n a_i b_i = -a \cdot b$$

が成立スル。コ / 事実 = 注意スル、 $\mathcal{R}$, root ($\neq 0$) = 對照スル Δ_n / vector / 全体 7 ∇ トスル時, ∇ の次の係

件ヲミタサネバナラヌ。³⁾

0. ∇ ハ n 個, linearly independent + vector
ヲ含ム。

1. $a, b \in \nabla \rightarrow 2ab/a^2 = \text{integer}$.

2. $a, b \in \nabla \rightarrow b - ja \in \nabla, j = 0, \dots, 2ab/a^2$

3. $a \in \nabla \rightarrow 2a \in \nabla$ ⁴⁾

V. D. Waerden³⁾ハ $\mathcal{R}$ ガ simple + ラベ更ニ次ノ條件

4. ∇ ハ $\Sigma = \text{orthogonal + subsystem} = \text{含タ}$
レヌ。

ガ成立スルコトニ注意シ、條件 0-4 ヲミタス Δ_n , vector
ノ system ∇ ノ下ベテノ type ヲ定メヌ。今 $e_i =$ 基礎
vector ヲ示ストキ、ノ結果ハ次ノ様ニナル。

$A_n : e_i - e_k.$

$B_n : \pm e_i, \pm e_j \pm e_k.$

$C_n : \pm 2e_i, \pm e_j \pm e_k.$

$D_n : \pm e_i \pm e_k.$

$G_2 : e_i - e_k, e_p - 2e_q + e_r.$

$F_4 : \pm e_i, \pm e_j \pm e_k, \frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4)$

3) B. L. van der Waerden: Die Klassifikation der
einfachen Lieschen Gruppen. Math. Zeitschr.
37.

4) V. D. Waerden's condition: ∇ enthält mit a
auch $-a$, aber keine weiteren Vielfachen
von a . 此処ガ導イタ條件 1, 2, 3 カラデアル。

$$E_6: e_i - e_k, \frac{1}{2}(e_p + e_q + e_r - e_s - e_t - e_u \pm \sqrt{2}e_7), \\ \pm \sqrt{2}e_7.$$

$$E_7: e_i - e_k, \frac{1}{2}(e_p + e_q + e_r + e_s - e_t - e_u - e_v - e_w)$$

$$E_8: \pm e_i \pm e_k, \pm \frac{1}{2}(e_p + e_q + e_r + e_s + e_t + e_u + e_v - e_w) \\ \pm \frac{1}{2}(e_p + e_q + e_r + e_s + e_t - e_u - e_v - e_w).$$

所テ V. D. Waerden ハ + 分 + ルコト即チ條件 0-4ヲミ
 グル Δ_n / vector / system ∇ = 對應スル root
 system ヲ有スル simple Lie ring が存在スル
 ルカ否カノ問題 = ハルシモ触レテオラス。更 = semi-simple
 Lie ring = 於テ條件 4 が成立スルトキ 必ズ simple
 ナルカ否カ = 就テモ氏ハルクトモ直接 = ハ注意シテオラス様
 = 思ハレル。

一方 E. Cartan ハソノ Thèse = 於テ H. Weyle
 ノ所謂 „komplizierte Determinantenrechnungen“
 = ヨリ simple Lie ring / root system C / 條
 補者?)ヲ定メ⁵⁾、更 = 其等ヲ實際 = root system トシ
 テ持ツヤリナ simple Lie ring / 存在ヲ論ビテカル。
 之カ実 = 單純リハ環ノ分類 = 関シテ氏ガ W. Killing ヲ越
 エテ前進シタ点デアツタ!! 然レモ氏ノ simple Lie ring
 ノ存在 = 關スル議論ハ 9通りノ各場合 = ツイテ別々 = 話ヲ
 進メテ行クノデアリ。加フルニソノ計算ハ複雑困難ヲ極メ、

5) V. D. Waerden ハソノ root vector / 問題 = 轉
 化シ root system ヲ幾何學的ニ定メクノデアツタ。

氏自身ハ確實ナコトヲナシタコトハ万々疑ヒノナイコトデア
アラウガ、氏以外ノ人ニ氏ノ結果ノ正當性ヲ認識セシメルコ
トハ相當ニ困難ナコトデアアルマイカ。而モ氏ノ議論ハ單
ニ構造論的ニ C_2 ヲ決定シタト云フニ止マリ、ソレガ

Jacobiノ恒等式ヲ満足セシメ得ルカ否カニツイテハ明
瞭デナイヤウニ思ハレル、更ニ出来上ツタ Lie ring が
semi-simple デアルコトノ証明ニ少ク共氏ノ These
ニハ缺ケテアル(之レガ云ヘテナケレバ出来上ツタ Lie
ring が simple カ否カノ判定が簡單ニ云ヘヌト思フ)
——尤モコレ等ノコトハ氏ニトツテハ証明ヲ要セザル程
trivial ノコトデアツタノデアラウ。

何レニモ $H. Weyle$ =ヨリ、以上ヲ述ベタ形ニ
simple Lie ringノbasisガnormierenセ
ラレ、続イテ $V. D. Waerden$ =ヨリ simple Lie ring
ガソノroot system =ヨリ完全ニ定ムルコトが指摘セ
ラレ而モ root system =対スル條件0-4ガ出サレテ
キレ以上コレ等ヲ用ヒテ simple Lie ringノ型ガ上ニ
述ベタ9通り實際ニ存在スルコトノ証明ガモラルヘリ殆ク
形デ出来ラモヨサソウニ思ハレル。

以下次ニ述ベマスノハ、ソノVorarbeitノ續リデ
アリマス。

先ツ§2デ次ノ定理ヲ証明シマス。

Theorem: characteristic zeroノ代数的閉
体ノ上ノ semi-simple Lie ringハソノroot system

が互 = orthogonal + subsystem = 分たれず時其時 = 限り simple デアル。

次デ §3 デ 次, Lemma フ 假定シテ 條件 0-4 フ ミタス Δ_n / vector / set ∇ フ root system = 對應スル vector / set トスルヤウナ Lie ring が存在シテ 而モ 其レ等が semi-simple = ナル (従テ Theorem カ フ simple = ナル コトが 合ル) コト フ 証明シマス。

Lemma: $N_{\alpha\beta}$ フ 次ノ 様ニ 定メル コトが 出来る。

$$N_{\alpha\beta} = \varepsilon \sqrt{R(\alpha, \beta)}, \quad \varepsilon = +1 \text{ or } -1$$

$$N_{\beta\alpha} = -N_{\alpha\beta}, \quad N_{-\alpha, -\beta} = N_{\alpha\beta}$$

$$N_{\beta\gamma} = N_{\gamma\alpha} = N_{\alpha\beta}; \quad \alpha + \beta + \gamma = 0$$

$$N_{\beta\gamma}N_{\alpha\delta} + N_{\gamma\alpha}N_{\beta\delta} + N_{\alpha\beta}N_{\gamma\delta} = 0.$$

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0; \quad \beta + \gamma, \gamma + \alpha, \alpha + \beta \neq 0$$

コノ Lemma ハ 問題トシテ ハ 單ナル 初等幾何ノ 問題ニ 遇ギヌ ノ デスカ 筆者ニ ハ 手ニ 煩ヘマセンデシタ。 御示教ヲ 得タイト 思ヒマス。 尤モ V.D. Waerden カ 述ベタ semi-simple Lie ring カノ root system = ヨリ 完全ニ 定メル コトノ 証明⁶⁾ デノ 方針デ ヤレバ 高々 有限回ノ 計算デ 目的ガ 達セラレル 訳デアリマスガ ソレデハ 大変デマ。

最後ニ §4 デ type A_{n-1}, B_n, D_n ニ ツイテノ

Lemma ノ 証明ヲ 試ミマス。 尤モ type A_n, B_n, C_n, D_n

ノ Simple Lie ring ハ matrix ニ ヨリ 奇麗ナ 形ガ 表ハサレテ 其レ故デ Lemma ハ コノ 場合ハ ママ 問題

6) B.L. v.d. Waerden 前掲論文

= スル必要がナイ訳ですが、 A_{n-1}, B_n, D_n / 三ツ / 場合
 が殆んど同時 = 片附ク氣が面白イト思ハレマス / デ書イテ置
 クコトヲ許シテ載キタイト思ヒマス。

§2. Theorem / 証明. $\mathfrak{g}$ / 上 / semi-simple
 Lie Ring $\mathfrak{g}$ / root ($\neq 0$) = 對應スル Δ_n / vector
 / system ∇ が互 = orthogonal + subsystem $\nabla_1,$
 $\nabla_2, \dots, \nabla_k$ = 分タレル + ラベ $\mathfrak{g}$ ハ ∇_i = 對應スル $\mathfrak{g}$
 / ideal $\mathfrak{g}_i$ / direct sum = ナルコトハ既 = V. D.
 Waerden が指摘シテアルヲ = trivial = 見テレル
 カラ、今 ∇ が互 = orthogonal + subsystem = 分
 タレスモノト假定シテ、コノキ $\mathfrak{g}$ が simple ナルコト
 テ示ス。⁷⁾

$\mathfrak{g}$ / ideal $\neq 0$ ヲ γ トセヨ。

先ツ少クトモ一ツ / root α = 對シテ $e_\alpha \in \gamma$ ナル
 コトヲ示ス。

$$d \neq 0 \text{ ヲトル: } d = \sum_{i=1}^n d_i h_i + \sum_{\alpha} d_{\alpha} e_{\alpha}$$

スベテ / $d_{\alpha} = 0$ / 場合: コノ時 $d = \sum d_i h_i$ デ少クトモ
 一ツ / $d_i \neq 0$, 扱テ

$$(\sum d_i a_i) e_{\alpha} = [d, e_{\alpha}] \in \gamma$$

デアルカ、今 $\mathfrak{g}$ / スベテ / root $\alpha = \sum a_i \lambda_i$ = 對シテ

7) 勿論 E. Cartan / 單純リイ環 / 分類 = 關スル結果ヲ承認
 スレバ、コノコト / 成五ナルコトが自然 = 出ル。然レヨレデハ
 念リ = 面白クナイシ面ニ我々 / 今ノ目的 = 對シテハ不適當デアル。

$\sum d_i a_i = 0$ トスレバ α ヲ linearly independent
 ナル個ノ root ヲ動かスコトニヨリ $d_1, d_2, \dots, d_n$
 ガスベテ zero トスコトガ決論セテレルカラゆクトモ一ツ
 ノ root $\alpha =$ 對シテ $\sum d_i a_i \neq 0$, 從ツテ新ル root α
 $=$ 對シテ $e_\alpha \in \mathcal{Y}$.

少クトモ一ツノ $d_\alpha \neq 0$ ノ場合: $d_\alpha \neq 0$ トセヨ: コノ
 時 $e_\alpha \in \mathcal{Y}$ ナルコトガ N. Jacobson⁸⁾ニ於ケルガ如ク
 次ノ様ニシテ示サレル:

$\mathcal{G}$ ノ general element h トスレバ

$$\overbrace{[h [h \dots [h, d] \dots]]}^{j \text{ 回}} = \sum_{\alpha} d_{\alpha} \alpha^j e_{\alpha}$$

此ノスベテノ root ヲ $d_1, d_2, \dots, d_m$ トスレバ
 determinant

$$D(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \begin{vmatrix} d_1 & d_2 & \dots & d_n \\ d_1^2 & d_2^2 & \dots & d_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_1^m & d_2^m & \dots & d_n^m \end{vmatrix}$$

ハ identically = zero ニハナラズカラ $D(\lambda^0) \neq 0$ ナ
 ル λ^0 ガトレル. Determinant $D(\lambda)$ テ α ノ列ノ

8) N. Jacobson: A class of normal simple Lie
 algebras of characteristic zero, Ann. of
 Math. vol. 38.

cofactor $\gamma D_1, D_2, \dots, D_m$ トスレバ

$$\sum_{i=1}^m \beta_i D_i = \begin{cases} D: \beta = \alpha \\ 0: \beta \neq \alpha \end{cases}$$

之レヲ用フレバ

$$D(\lambda) d_\alpha \cdot e_\alpha = \sum_{j=1}^m D_j \cdot \sum_{\alpha} d_\alpha \alpha^j e_\alpha$$

$$D(\lambda^0) d_\alpha \cdot e_\alpha \in \gamma$$

$D(\lambda^0) d_\alpha \neq 0$ ガカラ, 之レカラ $e_\alpha \in \gamma$.

斯クテ何レニシテ $\in$ ideal $\gamma \neq 0$ ハ e_α ナルーツ,
basisヲ含ムコトが知ラレタ。

$\alpha = e_\alpha \in \gamma$ ナラバ $e_{-\alpha} \in \gamma$ デアル。

何者: $h_\alpha = [e_\alpha, e_{-\alpha}] \in \gamma$ 故テ $-\alpha \cdot e_{-\alpha} = [h_\alpha, e_{-\alpha}]$ ハ γ ニ属スルガ $\alpha \neq 0$ デアルカラ $e_{-\alpha} \in \gamma$ トナル。

以上ノコトカラ γ ガ $\mathfrak{g}$ ノ e_ρ ナル形ノスベテノ basisヲ含ムコトが知ラレル。ソレニハ次ノコトが云ヘレバヨイ。

Lemma: $\mathfrak{g}$ ノ root system = 對應スル Δ_n ノ vector system ∇ ノ subsystem ∇' ガ次ノ條件

1° $\nabla' \cap \nabla$ ノ少ク共一ツノ vectorヲ含ム。

2° $a \in \nabla' \rightarrow -a \in \nabla'$

3° $a \in \nabla', b \in \nabla, a+b \in \nabla \rightarrow a+b \in \nabla'$

ヲミタスナラバ $\nabla' \cap \nabla = \emptyset$ 致スル。

何者: $\mathcal{Y} =$ 含マレル $\mathcal{R}$ / e_β ナル形, $\text{basis} =$ 對
應スル ∇ / vector / 全体ヲ ∇' トスレバ、コノ ∇' ハ
Lemma / 條件 $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ$ ヲミタス。 $1^\circ, 2^\circ$ ハ以
上デ証明シタコトカラ、 3° ハ $\mathcal{Y}$ が ideal ナルコト及ビ
 $\alpha + \beta$ が $\mathcal{R}$ / $\text{root} \neq 0$ ナラバ $N_{\alpha\beta} \neq 0$ ナルコトカラ
知ラレル。従テコノ Lemma が証明セラレタトスレバ $\mathcal{Y}$ ハ
 $\mathcal{R}$ / e_β ナル形, basis ヲスベテ含ム。

トコロデ $\mathcal{Y}$ が $\mathcal{R}$ / e_β ナル形 / スベテ / basis ヲ
含メバ $\mathcal{Y}$ ハ $\mathcal{R} =$ 一致スル。何者: $h_\alpha = [e_\alpha, e_{-\alpha}] \in \mathcal{Y}$
テ $h_\alpha = -\sum_{i=1}^n a_i h_i$ 。今又トシテ linearly inde-
 pendent ナル個 / root ヲ動かセバコノ個 / h_α ハ
 $\mathcal{Q}$ / basis ヲ作ルカラ。

斯クテ Lemma が証明セラレレバ我々ノ主張ハ成立ス
ルコトナル。

Lemma / 証明: $1^\circ =$ ヨリ含マレル ∇' / vector
ヲ α トス。

然ラバ條件 2° カラ $-a \in \nabla'$ 。 b ヲ ∇ / 任意 /
 vector トス。

$ab \neq 0$ / 場合。コノトキ $ab > 0$ 或 $ab < 0$ 。

$ab > 0$ ナラバ $2ab/a^2 \geq 1$ 。故ニ $b - a \in \nabla$ 。
 $b - a \in \nabla, a \in \nabla'$ 、 $(b - a) + a \in \nabla$ ナカラ條件 2°
カラ $b \in \nabla'$ 。

$ab < 0$ ナラバ $2ab/a^2 \leq -1$ 。故ニ $b + a \in \nabla$ 、
 $b + a \in \nabla, -a \in \nabla'$ 、 $(b + a) - a \in \nabla$ ナカラ條件 2°

カラ $b \in \nabla'$.

$ab=0$ の場合.

$\nabla_1 = \{a, -a\}$ ト ∇_1 の vector = orthogonal
ト ∇ の vector の全体ヲ $\widetilde{\nabla}_1$ トスレバ $b \in \widetilde{\nabla}_1$. ∇_1 ト
 $\widetilde{\nabla}_1$ トの vector の全体ガ ∇ の vector の全体トナレバ
初メニ設ケタ ∇ ニ對スル假定 4 = 反ス。故ニ $\nabla_1 = \in \widetilde{\nabla}_1$
ニモ屬セヌ ∇ の vector a_1 ガアル。 $a_1 b = 0$ ナラバ
 ∇_1 の vector 及ビ a_1 = ヨリ張ラレル vector space
= 屬スル ∇ の vector の全体ヲ ∇_2 トスル: $\nabla_1 \perp \nabla_2$,
 $b \perp \nabla_2$. ∇_2 = orthogonal ト ∇ の vector の全体
ヲ $\widetilde{\nabla}_2$ トスレバ $b \in \widetilde{\nabla}_2$ デ假定 4 カラ $\nabla_2 = \in \widetilde{\nabla}_2$ = 屬セ
ヌ ∇ の vector a_2 ガアル。 $a_2 b = 0$ ナラバ ∇_2 の
vector 及ビ a_2 = ヨリ張ラレル vectorspace =
屬スル ∇ の vector の全体ヲ ∇_3 トスル: $\nabla_2 \perp \nabla_3$,
 $b \perp \nabla_3, \dots$

斯クシテ進メバ $\nabla_1 \perp \nabla_2 \perp \nabla_3 \perp \dots$ ヲ得ルカラ ∇ の
vector の個數ノ有限ナルコトカラ $ab=0$, $a_1 b=0, \dots$
 $\dots$, $a_{i-1} b=0$, $a_i b \neq 0$ ナル i ガ定マレル。今ノ作り方
カラ明カニ $a a_i \neq 0$ デアルカラ既ニ示シタ 証明カラ
 $a_i \in \nabla'$ 従テ 2° カラ $-a_i \in \nabla'$, 之レト $a_i b \neq 0$
トカラ $b \in \nabla'$.

Remark. 以上ノ証明カラ次ノ良ク知ラレタ結果ガ
characteristic zero の代数的閉体ノ上ノ Lie ring
ニツイテ直チニ決論セラレル:

semi-simple Lie ring の semi-simple 且 simple + ideal の直和 = 分解セラレル。

§3. §1 で述べた条件 0-4 をミタス Δ_n の vector 集合 ∇ トセヨ。 ∇ 7 root system = 對應スル vector 1 set トスルヲウナ simple Lie ring が 實際ニ存在スルコトヲ §1 で述べた Lemma 7 假定シタ上デ示ソウト云フノデアルが、其タメニ尚ニ §1 Lemma 7 証明シタケレバトラナイ。

∇ の vector a, b = 對シテ

$$T(b, a) = 2ba/a^2$$

ト置ク。更ニ V. D. Waerden の結果カラモ明カナ様 = ∇ の vector 1 個數ハ有限デアルカラ

$$b - ia, \dots, b - a, b, b + a, \dots, b + ka \in \nabla$$

$$b - (i+1)a, b + (k+1)a \in \nabla$$

ナラ integer $i, k \geq 0$ ガ定ムルガコトキ

$$R(b, a) = \frac{(i+1)k}{2} a^2$$

ト置ク。 $a+b \in \nabla$ ナラ必然 $R(b, a) = 0$ デアル。

$$i) \quad T(b, a) = i - k$$

9) 勿論コトコトハ characteristic zero の field 上

1 semi-simple Lie ring = $\tau \mathcal{P}(x) = \text{trace}(X^2)$

ガ non-singular ナルコトニ注意スレバ (代数的

閉体ナレ制限ナレ) 一般ニ成立スルコトが見ラレル。

吉田氏: リー環論 PP. 10-12 参照。

証. 先ず $b, a \in \nabla$, $b-a \in \nabla$ 十ラバ
 $b - (T(b, a) - 1) a \in \nabla$ デアル.

何者: $b - (T(b, a) - 1) a \in \nabla$ 十ラバ, $\nabla =$
 對スル條件 2 カラ

$$\begin{aligned} b - (T(b, a) - 1) a - T(b - (T(b, a) - 1) a, a) a \\ = b - a \end{aligned}$$

が $\nabla =$ 屬スルコト = ナリ 不合理トナルカラ

故テ $b - ia, a \in \nabla$ デ $b - (i+1)a \in \nabla$ デアルカ
 ラ今ノ結果ヲ用フレバ

$$\begin{aligned} b - ia - (T(b - ia, a) - 1) a \\ = b + ((i+1) - T(b, a)) \cdot a \end{aligned}$$

ハ $\nabla =$ 屬セヌ. 從テ $\nabla =$ 對スル條件 2 カラ シテ

$$i - T(b, a) = k, \quad T(b, a) = i - k$$

デナケレバナラヌ.

$$ii) \quad ba = R(-b, a) - R(b, a).$$

証. $b - ia, \dots, b - a, b, b + a, \dots, b + ka \in \nabla$
 $b - (i+1)a, b + (k+1)a \notin \nabla$

トスレバ

$$\begin{aligned} -b - ka, \dots, -b - a, -b, -b + a, \dots, -b + ia \in \nabla \\ -b - (k+1)a, -b + (i+1)a \notin \nabla \end{aligned}$$

デアレカラ R , def. カラ

$$R(-b, a) = \frac{(k+1)i}{2} a^2$$

故 = i) ヲ用ヒテ

$$R(-b, a) - R(b, a) = \frac{i-k}{2} a^2 = \frac{T(b, a)}{2} a^2 = ba.$$

$$\text{iii) } R(a, b) = R(-a, -b)$$

$$\begin{aligned} R(a, b) &= R(b, c) = R(c, a) \\ &= R(b, a) = R(c, b) = R(a, c); \\ a + b + c &= 0. \end{aligned}$$

証. $a + b + c = 0$ ナル ∇ 1 vector $a, b, c =$
於テ $a^2 \leq b^2 \leq c^2$ ト假定スルモ一般性ヲ失ハヌ。然ル時
 $\nabla =$ 對スル條件 1 カラ 3 ヲ三ツノ場合ノミ可能ナルコトが
知ラレル。

$$\text{場合1. } b^2 = a^2, c^2 = 3a^2 : ab \neq 0.$$

$$\text{場合2. } b^2 = a^2, c^2 = 2a^2 : ac \neq 0.$$

$$\text{場合3. } a^2 = b^2 = c^2 : ac \neq 0.$$

更ニ $\nabla =$ 對スル條件 2 カラ V. D. Waerden ノ計算ノ如
クシテ、コノ a, b, c ナル三個ノ vector ノ張ル Δ_n ノ
subspace = 属スル ∇ 1 vector ハ場合 1, 2, 3 ナ
ルニ從ツテ G_2, B_2 ナル A_2 ノ type ヲ作ル。之カラ
 $R(a, b) = R(-a, -b)$ ノ明カ。更ニ

$$\text{場合1ヲハ } R(a, b) = \frac{3b^2}{2}, R(b, c) = \frac{c^2}{2},$$

$$R(c, a) = \frac{3a^2}{2}, \dots\dots$$

$$\text{場合2ヲハ } R(a, b) = b^2, R(b, c) = \frac{c^2}{2},$$

$$R(c, a) = a^2, \dots\dots$$

$$\text{場合3デハ } R(a, b) = \frac{b^2}{2}, \quad R(b, c) = \frac{c^2}{2}.$$

$$R(c, a) = \frac{a^2}{2}, \dots$$

ヲ得ルカラ主張ハ成立スル。

扱テ ∇ ノ 各 vector $a =$ 對シテ

$$Na = -\frac{1}{2} a^2 \sum \frac{g(g+1)(g+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

ト置ク。此処ニ $\sum g(g+1)(g+2)/1 \cdot 2 \cdot 3$ ハ H. Weyle
II. P. 366 (21) 式ト同ジ意味ヲ有スルモノトス コノ際
H. Weyle ノ計算カラ $Na \neq 0$ デアル。之レニ對シテ次
ノコトガ成立スル。

iv) ∇ デ次ノ條件ヲミタス n 個ノ linearly in-
dependent + vector $b_1, b_2, \dots, b_n$ ガトレル。

$$Nb_1 = Nb_2 = \dots = Nb_n.$$

証。先ツ $\nabla = \tau$

$$a, a_j \neq 0, \quad j = 2, 3, \dots, n$$

ヲミタス linearly independent + n 個ノ vector
 $a_1, a_2, \dots, a_n$ ガトレル。例ヘバ

$$A_n \text{ デハ } a_i = e_i - e_{i+1} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$B_n \text{ デハ } a_i = e_i + e_{i+1} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1),$$

$$a_n = e_n$$

$$C_n \text{ デハ } a_i = e_i + e_{i+1} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

$$a_n = 2e_n$$

$$D_n \text{ デハ } a_i = e_i + e_{i+1} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

$$a_n = e_1 - e_n$$

$$E_6 \ni a_i = e_1 - e_{i+1} \quad (i=1, 2, \dots, 5)$$

$$a_6 = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 + e_3 - e_4 - e_5 - e_6 + \sqrt{2}e_7)$$

トスレバヨイ ($C_2 \ni A_2 \ni, F_4 \ni B_4 \ni, E_7 \ni A_7 \ni, E_8 \ni A_8 \ni$ 舍ムカラ之レヲニツイテハ既ニ示サレテキル)

斯ニ n 個ノ vector a_i ヲ用ヒ

$$b_i = a_i - T(a_i, a_i) \cdot a_i, \quad i=1, 2, \dots, n$$

ト置ケバ容易ニ

$$b_i^2 = a_i^2, \quad i=1, 2, \dots, n$$

ナルコトが見ラレル。更ニ a_i ノ取り方カラ $T(a_i, a_i) \neq 0$, 従テ $b_1, b_2, \dots, b_n$ ハ linearly independent.

而シテ transformation $X' = X - T(X, a_i) \cdot a_i$ ハ Δ_n ノ原素ヲ通り vector a_i = orthogonal + 超平面ニ関スル reflection ヲ意味スルカラ各 b_i = 関スル。

$$\sum g(g+1)(g+2)/1 \cdot 2 \cdot 3$$

1 値ハ a_i ノレニ一致シ, 従テ $b_i^2 = a_i^2$ カラ $Nb_i = Na_i$ が成立スル。

扱テ此処デモ I テ述べタ Lemma ヲ假定スレバ次ノコトが証明セラレル。

Theorem. 条件 0-4 ヲミタス vector, set ∇ ヲ root system = 對應スル vector, set トスルモノヲ semi-simple 且ツ simple + Lie ring が存在スル。

証. ∇ 系 vector $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) =$ 對
 して parameter $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ linear form
 $\alpha = \sum_{i=1}^n a_i \lambda_i$ を考へル. 先づ Δ を含ム代數的關体 Ω
 上, vector space を作ル.

$$\mathcal{R} = h_1 \Omega + \dots + h_n \Omega + \sum_{\alpha \in \nabla} e_\alpha \Omega$$

次 $= \mathcal{R}$ basis 間, 計算規則を次, $x, y = \text{def.}$

なる:

$$[h_i, h_k] = 0, \quad 1 \leq i, k \leq n.$$

$$[h, e_\alpha] = \alpha \cdot e_\alpha \quad \text{特} = [h_i, e_\alpha] = a_i e_\alpha$$

$$[e_\alpha, e_{-\alpha}] = h_\alpha = -\sum_{i=1}^n a_i h_i$$

$$[e_\alpha, e_\beta] = N_{\alpha\beta} e_{\alpha+\beta} : \alpha + \beta \neq 0$$

此處 $= a + b \in \nabla$ とき $N_{\alpha\beta} = 0$ と定メル. $a + b \in \nabla$

とき $\S 1$ で述べた Lemma の假定の下で次, $x, y =$

$N_{\alpha\beta}$ を定メル (iii, 式参照)

$$N_{\alpha\beta} = \varepsilon \sqrt{R(a, b)}, \quad \varepsilon = +1 \text{ or } -1$$

$$N_{\alpha\beta} = N_{-\alpha, -\beta}, \quad N_{\beta\alpha} = -N_{\alpha\beta}$$

$$N_{\beta\gamma} = N_{\gamma\alpha} = N_{\alpha\beta} : \alpha + \beta + \gamma = 0$$

$$N_{\beta\gamma} N_{\alpha\delta} + N_{\gamma\alpha} N_{\beta\delta} + N_{\alpha\beta} N_{\gamma\delta} = 0 :$$

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0, \quad \beta + \gamma, \gamma + \alpha, \alpha + \beta \neq 0$$

更 =

$$[u, v] + [vu] = 0$$

ト置キ distributive Law を假定スレバ $\mathcal{R}$ は Lie
 ring を作ル. ソレ $=$ Jacobi の恒等式ヲ示セバ十分

デアル。トコロデ $N_{\alpha\beta}$ ノ取り方カラ

$$[e_\alpha[e_\beta, e_\gamma]] + [e_\beta[e_\gamma, e_\alpha]] + [e_\gamma[e_\alpha, e_\beta]] = 0:$$

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0, \beta + \gamma, \gamma + \alpha, \alpha + \beta \neq 0.$$

カ成立スルコトハ當然デアルカラ

$$[e_\alpha[e_\beta, e_{-\beta}]] + [e_\beta[e_{-\beta}, e_\alpha]] + [e_{-\beta}[e_\alpha, e_\beta]] = 0:$$

$$\alpha \neq \pm \beta$$

ヲ示セバヨイ。他ノ場合ハ *trivial* = 成立スルカラ

採テ

$$\begin{aligned} & [e_\alpha[e_\beta, e_{-\beta}]] + [e_\beta[e_{-\beta}, e_\alpha]] + [e_{-\beta}[e_\alpha, e_\beta]] \\ &= (-\alpha\beta + N_{-\beta, \alpha} N_{\beta, -\beta + \alpha} + N_{\alpha\beta} N_{-\beta, \alpha + \beta}) e_\alpha \\ &= (-\alpha\beta - N_{\alpha, \beta}^2 + N_{\alpha\beta}^2) e_\alpha \\ &= (-\alpha\beta - \mathcal{R}(-\alpha, \beta) + \mathcal{R}(\alpha, \beta)) e_\alpha \end{aligned}$$

從テ iii ノ式カラ左辺ハ $= 0$ トナリ主張ハ成立スル。

$\mathcal{K} = \mathcal{H}$ カ *semi-simple* ナルコトヲ示ス。

$\mathcal{P}(x) = \text{trace } X^2$ ヲ計算スレバ

$$\mathcal{P}(x) = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} \lambda_i \lambda_j + \sum_{\alpha} N_{\alpha} \tau_{-\alpha} \tau_{\alpha}$$

此処ニ。

$$g_{ij} = \text{trace } (H_i H_j)$$

$$N_{\alpha} = \text{trace } (E_{-\alpha} E_{\alpha}) = \frac{1}{2} \alpha_{\alpha} \sum_{1,2,3} \frac{g(g+1)(g+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

ナルコトハ *basis* 間ノ計算規則カラ知ラレル。コノ場合

$N_{\alpha} \neq 0$ ナルコトハ既ニ注意シタ。次ニ

$$\mathcal{P}([e_{\beta} x], x) = 0$$

カラ次ノ関係が出ル。¹⁰⁾

$$N_{\beta} \cdot \beta = \sum g_{ij} b_i \lambda_j,$$

従テ $N_{\beta} b_j = \sum g_{ij} \cdot b_i$

扱テ Lemma iv) = ヲリ

$$N_{\beta^{(i)}} = N \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

ナル n 個, linearly independent + $\beta^{(i)}$ がト
レル. 上式ニ於テコ, $\beta^{(i)}$ ヲ用テレバ

$$g_{1j} b_1^{(i)} + \dots + g_{j-1,j} b_{j-1}^{(i)} + (g_{jj} - N) b_j^{(i)} \\ + g_{j+1,j} b_{j+1}^{(i)} + \dots + g_{nj} b_n^{(i)} = 0$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

$\beta^{(1)}, \beta^{(2)}, \dots, \beta^{(n)}$, linearly independent +
ルコトカラ, 之カラ

$$g_{ij} = \begin{cases} 0 & : i \neq j \\ N & : i = j \end{cases}$$

$$\therefore \varphi(x) = N(\lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2) + \sum_{\alpha} N_{\alpha} \tau_{-\alpha} \tau_{\alpha}$$

之レカラ明カ = $\varphi(x)$ ハ non-singular 従テ $\mathcal{R}$ ハ
semi-simple テアル.

更ニ $\mathcal{R}$, root system = 對應スル Δ_n , vector
ノ system ハ明カ = 初メ與ヘタ ∇ テアリ, コノ ∇ ハ條件以
テミタスノテアルカラ §2, Theorem カラ $\mathcal{R}$ ハ simple
テアル. 以上。

10) 吉田氏: リー理論 P.26 参照.

§4. 此処では type A_{n-1}, B_n, D_n vector system = ツイテ §1 で述べた Lemma を証明スル。
 即ち $N_{\alpha\beta}$ 次数 α, β = 定メルコトが出来ルコトヲ示ス。

$$N_{\alpha\beta} = \varepsilon \sqrt{R(\alpha, \beta)}, \quad \varepsilon = +1 \text{ or } -1$$

$$N_{\beta\alpha} = -N_{\alpha\beta}, \quad N_{-\alpha, -\beta} = N_{\alpha\beta}$$

$$N_{\beta\gamma} = N_{\gamma\beta} = N_{\alpha\beta} : \alpha + \beta + \gamma = 0$$

$$(1) \quad N_{\beta\gamma} N_{\alpha\delta} + N_{\gamma\alpha} N_{\beta\delta} + N_{\alpha\beta} N_{\gamma\delta} = 0$$

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0, \quad \beta + \gamma, \gamma + \alpha, \alpha + \beta \neq 0$$

証明: parameter $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ = 對シテ次数 α の順序ヲツケル。

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n > 0 > -\lambda_n > \dots > -\lambda_1$$

$\pm \lambda_i$ 有 $\alpha, \beta, \dots$ 有 $-\alpha = \alpha'$ ト置ク。 $\alpha \neq \beta$ = 對シテ次数1 特殊函数 $g(\alpha, \beta)$ 有 def. スル。

$$g(\alpha, \beta) = 1 \text{ for } 0 < \alpha < \beta \text{ or } \alpha < 0 < \beta$$

$$g(\beta, \alpha) = -g(\alpha, \beta), \quad g(\alpha', \beta') = g(\alpha, \beta).$$

$$\text{更} = \alpha \neq \beta, \alpha \neq \gamma, \beta \neq \gamma = \text{對シテ}$$

$$g(\alpha + \beta', \beta + \gamma) = -g(\alpha, \beta') g(\beta, \gamma) / g(\alpha, \gamma)$$

從テ

$$(2) \quad g(\alpha + \beta', \beta + \gamma) g(\alpha, \gamma) + g(\alpha, \beta') g(\beta, \gamma) = 0$$

トスレバ此式が成立スルコトハ直チニ見ラレル。

$$g(\beta + \gamma, \alpha + \beta') = -g(\alpha + \beta', \beta + \gamma)$$

$$g(\alpha' + \beta, \beta' + \gamma') = g(\alpha + \beta', \beta + \gamma)$$

$$g(\alpha + \beta', \beta + \gamma) = g(\beta + \gamma, \gamma' + \alpha')$$

$$= g(\gamma' + \alpha', \alpha + \beta')$$

次 =

$$(\alpha + \beta') + (\beta + \gamma) + (\alpha' + \delta) + (\delta' + \gamma') = 0$$

ヲアルガ之ニ對シテ次ノコトが成立スル。

$$(3) \quad \varphi(\alpha + \beta', \beta + \gamma) \varphi(\alpha' + \delta, \delta' + \gamma') \\ + \varphi(\alpha' + \delta, \alpha + \beta') \varphi(\beta + \gamma, \delta' + \gamma') = 0$$

何者:

$$\begin{aligned} & \varphi(\alpha + \beta', \beta + \gamma) \varphi(\alpha' + \delta, \delta' + \gamma') \\ &= \varphi(\alpha, \beta') \varphi(\beta, \gamma) \varphi(\alpha', \delta) \varphi(\delta', \gamma') / \varphi(\alpha, \gamma)^2 \\ & \varphi(\alpha' + \delta, \alpha + \beta') \varphi(\beta + \gamma, \delta' + \gamma') \\ &= -\varphi(\delta, \alpha') \varphi(\alpha, \beta') \varphi(\beta, \gamma) \varphi(\gamma', \delta') / \varphi(\delta, \beta')^2 \\ & \varphi(\alpha, \gamma)^2 = \varphi(\delta, \beta')^2 = 1 \quad \text{タカラコノ両式ヲ逐々相加ヘ} \\ & \quad \text{テ求ムル結果ニ到達スル。} \end{aligned}$$

以上ヲ type A_{n-1} , B_n , D_n = ヲイテ Lemma が
証明セラレテ居ル。即チ

type A_{n-1} デハ

$$N \lambda_i - \lambda_j, \lambda_j - \lambda_k = \varphi(\lambda_i - \lambda_j, \lambda_j - \lambda_k)$$

ト置ケバ (3) 式ガ條件(1)ノ成立スルコトヲ示シ

type B_n デハ

$$N \lambda_i, \lambda_k = \varphi(\lambda_i, \lambda_k)$$

$$N \lambda_i, -\lambda_k = \varphi(\lambda_i, -\lambda_k)$$

$$N \lambda_i - \lambda_j, \lambda_j + \lambda_k = \varphi(\lambda_i - \lambda_j, \lambda_j + \lambda_k)$$

$$N \lambda_i - \lambda_j, \lambda_j - \lambda_k = \varphi(\lambda_i - \lambda_j, \lambda_j - \lambda_k)$$

ト置ケバ (2) 及ビ (3) 式ガ條件(1)ノ成立スルコトヲ示シ

type D_n デハ

$$N \lambda_i - \lambda_j, \lambda_j + \lambda_k = \varphi(\lambda_i - \lambda_j, \lambda_j + \lambda_k)$$

$$N \lambda_i - \lambda_j, \lambda_j - \lambda_k = \varphi(\lambda_i - \lambda_j, \lambda_j - \lambda_k)$$

ト置ケバ (3) 式が條件 (1) ノ成立スルコトヲ示シテキル。而
シテ Lemma ノ他ノ條件ハ以上ヲ述ベタコトカラ明カニ成
立シテキルカラ我々ノ主張ハ成立スル。 — 以上 —