# 824. Überdeckung ノ Homologiegruppe ニ就テ

小松　醇郎（阪大）

複体 $K^n$ ノ Homologiegruppe カラ $K^n$ ノ Überdeckung ノ Homologiegruppe ノ條件ガドノ程度マデ規定サレルカ？ コレハ中々難シイ。例ヘバ $K^n$ ノ $n$ 次元 Homologiegruppe ハ如何ナル係數群ヲ持ッテ來テモ凡テ 0 ニナッテ，而モ Überdeckung ニシタナラバ 0 デナイ $n$ 次元 Homologiegruppe ガ存在スル又ウナコトガアル。

是レハ而モ Reidemeister ノ意味ノ Überdeckung デ出來ル。

例 I. 球面 $S^2$ カラ離レタ三ツノ Simplex $T^2_1$, $T^2_2$, $T^2_3$ ヲ取除リ，三ツノ境界 $\dot{T}^2_1$, $\dot{T}^2_2$, $\dot{T}^2_3$ ヲ此ノ Orientierung デ Identifizieren スル。生ズル複体 $K^2$ ニハ如何ナル係數群ヲトルモ 2 次元ノ Zyklus デ ≠ 0 ナルモノ存在シナイ。

然ル＝ $\dot{T}^2_1 = T^1_{11} + T^1_{12} + T^1_{13}$, $T^2_4 > T^1_{11}$, $T^2_5 > T^1_{12}$, $T^2_6 > T^1_{13}$ デアッタトシタトキ新シイ Überdeckung トシテ mod. 3 ノ整數群ヲトリ Automorphismus $\gamma$ トシテ

$$T^2_4 \rightarrow T^1_{11},\quad T^2_5 \rightarrow T^1_{12},\quad T^2_6 \rightarrow T^1_{13}$$

ノ間ノ Automorphismus ハ $-\mathrm{I}$（逆元ヲ對應サセ

ル奴)、ソノ外ノ $T_c^2 \to T_j^2$ ノ Automorphismus ハ I(不変ノ奴)ト定メル。

此ノ Überdeckung ハ結局 $\dot{T}_1^2$, $\dot{T}_2^2$, $\dot{T}_3^2$ ヲ此ノ Orientierung デ Identifizieren スルコトニ相當スル。従ッテ mod. 3 ナラバ $Z^2 \not\sim 0$ ガ存在スル。

此ノ例ハ次元ニ関係シナイ。今度ハ逆ニ $K^n$ ノ普通ノ意味ノ Homologiegruppe ハ如何ナル係数デモ 0 デナイノニ、wesentlich ナ überdeckung ヲトレバ Homologiegruppe ハ如何ナル係数群デモ 0 ニナルコトガアル。茲ニ wesentlich ナ überdeckung トハソレヲ定メル Automorphismen ノ中ニ I(identisch ナ Automorphismus)以外ノ Automorphismus ガ必ズ出テ来ル奴ヲ言フ。[1]

此ノ例ハ Mannigfaltigkeit $M^n$ ノ $n$ 次元 Homologiegruppe デアルガ準備ヲ要スル。以上ニヨッテ überdeckung ヲトレバ Homologiegruppe ハスッカリ変ッテ仕舞フコトガ分ッタ。

<u>定理1.</u> Überdeckung ノ Homologiegruppe ハ係数群 $\mathfrak{G}$ ヲ定メタ場合、Fundamentalgruppe ノ $\Gamma$

---

1) mod. 2 ノ整数群ヲトレバ wesentlich ナ überdeckung ハ存在シナイ。係数群ノ部分群ヲ係数ニトレバ wesentlich デナクナッテ仕舞フ奴モ除外スル。

ハ，Charakter ニ依ッテ一意ニ定マル．茲ニ $\Gamma$ ハ Of ノ inverse ノアル Automorphismen カラ積ヲ結合則トシテ出来ル群デアル．

<u>証明</u>:　$K^n$ ノ überdeckungen $U_1, U_2$ ハ Fundamentalgruppe ノ $\Gamma$ ニヨル Darstellung ガ等シイトスル。

第一段．Darstellung ヲ変ヘズニ $U_1$ ヲ $U_2$ ニ変ヘルコト。

$K^n$ ヲ baryzentrisch ニ一回 unterteilen シタモノヲ $K_0^n$，$K_0^n$ ノ lineare Strecke ノウチ次元ガ二ツ又ハ二ツ以上異ナル単体ノ重心ヲ結ブ奴ハ凡テ除外スル．残ル一次元単体 $K_0^1$ トスル．又次元ガ三ツ又ハソレ以上異ル重心三ツカラ出来ル二次元単体ヲ凡テ除外スル．残リノ二次元単体ヲ次ノ如キモノ二ツヅツ加エテ二次元 Zelle ニスル．$K_0^2$．

$$\begin{array}{ccc} & T^n & \\ \swarrow & & \searrow \\ T_1^{n-1} & & T_2^{n-1} \\ \searrow & & \swarrow \\ & T^{n-2} & \end{array}$$

$K_0^2$ ノ二次元 Zelle ノ境界デアル Strecke ハ凡テ $K_0^1$ ノ Element カラ出来ル．$K_0^1$ ノ各 Strecke ニ $U_i$ $(i=1,2)$ デ定義サレタ Automorphismus $\gamma$ ヲ Orientierung モコメテ対應出来ル．従ッテ $K_0^2$ ノ閉道ニ

Automorphismus $\gamma(\in\Gamma)$ が對應出來ルガ, homotop $O$ in $K_0^2$ ノ閉道ニハ I ( identisch ナ Automorphismus ) ガ對應スル。

$K^n$ ノ $i$ 次元單体ノ重心迄ヲ結ンデ生ズル一次元複体ヲ $K'_{0i}$ トスル. 先ヅ $K'_{01}$ ニ対シ $\mathfrak{U}_1$ ニヨル Darstellung ヲ $\mathfrak{U}_2$ ニヨル Darstellung ニ直シ次ニ $K'_{02}$ 迄ト順次ニ進メル。

$K'_{0n}$ ノ topologischer Baum $B'$ ヲ作ル. 原点カラ出ル Strecke $\delta', \delta^2, \delta^3, \ldots\ldots, \delta^i$ トシ $\mathfrak{U}_1$ ニヨリ對應スル Automorphismen $\gamma', \gamma^2, \ldots\ldots, \gamma^i$. $\mathfrak{U}_2$ ニヨルノヲ $\delta', \delta^2, \ldots\ldots, \delta^i$ トスレバ先ヅ $\gamma^i$ ハ $\delta^i$ ト変ヘル. 次ニ $\delta^i$ ノ端点カラ出ル Strecke

$$\delta^{11}, \delta^{12}, \ldots\ldots\ldots, \delta^{1i_1}$$

$$\text{---------}$$

$$\delta^{i1}, \delta^{i2}, \ldots\ldots\ldots, \delta^{ii_j}$$

ニ對應スル Automorphismen ハ $\mathfrak{U}_1$ ニヨリ夫々 $\gamma^{ii_k}$ トスレバ $\gamma^i$ ヲ $\delta^i$ トシタコトニヨリ夫々 $\gamma^{ii_k}\gamma^i(\delta^i)^{-1}$ ヲ對應セシメル. 是レニヨツテ $K_0^2$ ノ Fundamentalgruppe ニ対スル Darstellung ヲ変ヘズニ各線分ニ Automorphismus ガ對應出來タ. 即チ $K^n$ ノ新ラシイ一ツノ Überdeckung デアツテ $\mathfrak{U}_1$ カラ $\mathfrak{U}_2$ ニ移ル途中デアル. 次ニ又 $\delta^{ii_k}$ ノ Automorphismus ヲ强制的ニ $\delta^{ii_k}$ トスレバ原点カラノ長サ3ノ Strecke $\delta^{ii_ki_{k_2}}$ ニ對スル Automorphismus ハ

$\gamma^{i i_k i_{k_2}} \gamma^{i i_k} \gamma^{i} (\delta^{i})^{-1} (\delta^{i i_k})^{-1}$ トセネバナラヌ. 斯クテ原点カラ長サ1, 2ノStreckeニハ$U_2$ト等シイ$\delta$, 長サ3ノ線分ハ上ノ長イ奴, 長サ4以上ハ凡テ$U_1$ト等シイAutomorphismus $\gamma$ガ對應スル所ノÜberdeckungガ生ズル。

斯クテBaum $B'$ノ夫々ノ端ノ一ツノStreckeハ上ノ長イ形ノAutomorphismus, ソノ外ハ$\delta$($U_2$ノ奴)デ表ハサレル所ノüberdeckungガ生ズル. 端ノStreckeモ強制的ニ$\delta$トスルナラバ$K'_{0n}$ノ閉道ノ所ガ問題トナル。

然シ閉道ヲ作ル所ノ最後ノ一ツノStreckeニハ上ノ長イ形ノAutomorphismusガ對應スルガドチラカラ定義シテ來ル奴モ一致スル。然シテ$\delta$ニナル、是デ$U_1$ノüberdeckungガ$U_2$ニナッタ.

$K'_{0n}$ノBaum $B'$トシテヤッテ行ッタガ先ヅ$K'_{01}$ヲ今ノ如ク定メル. ソノトキ$K'_{02}$ニ始メテ出テ來ルStreckeハ$\gamma$ト$\delta$トヲ使ッテ表ハサレル長イ形ノ奴ガ對應スル. 是ニ強制的ニ$\delta$ヲ對應セシメルト今度ハ$K'_{03}$ニ始メテ出テ來ルStreckeニ$\gamma$ト$\delta$トデ表ハス奴デ對應セシメネバナラナイ. 各段階ハ夫々überdeckungデアル。

(第二段) $U_1$ト$U_2$トデHomologiegruppe $B^i(K^n, U_1)$ト$B^i(K^n, U_2)$トisomorphナルコト.

$U_1$ト$U_2$トデisomorphナル代リニ途中ノ各段

階ノ Überdeckung デ isomorph デ言ヘバ充分デアル。

$K'_0$ ノ各 Strecke ノ $\gamma$ ヲ $\delta$ デ入レ換ヘテ居ル途中ノ Überdeckung $\mathfrak{U}$ デハ 2次元及ビソレ以上ハ $\mathfrak{U}_1$ ト変ラナイカラ $B^i(K^n, \mathfrak{U}_1)$ $(i \geqq 2)$ ハ不変。

$$s^i \longrightarrow \delta^i, \quad s^{iik} \longrightarrow \gamma^{iik}\gamma^i(\delta^i)^{-1}$$

トシタ場合ノ Überdeckung $\mathfrak{U}$ デハ Simplex デ図示スレバ

$$\begin{tikzcd} & T'_1 \arrow[dl, "\delta^{i1}"'] \arrow[r, "s^{i1}"] \arrow[dd, dotted, no head] & T^0_1 \\ T^0 & & \\ & T'_i \arrow[ul] \arrow[r] & T^0_i \end{tikzcd}$$

$B'(K^n, \mathfrak{U}_1) \ni Z'_1$, $Z'_1 : T'_j \longrightarrow \alpha_j\ (\in \mathfrak{G}) \neq 0$ トスレバ $B'(K^n, \mathfrak{U})$ ノ Element トシテ次ノモノガトレル。

$$\begin{aligned} Z' :\quad & T'_1 \longrightarrow \delta_1\gamma_1^{-1}(\alpha_1) \\ & \quad\vdots \\ & T'_i \longrightarrow \delta_i\gamma_i^{-1}(\alpha_i) \\ \text{他ノ}\ & T'_j \longrightarrow \alpha_j \end{aligned}$$

Zyklus ナルコト明カ。$\neq 0$ ナルコトモ容易ニ分ル。

$B'(K^n, \mathfrak{U}_1)$ ノ元ト $B'(K^n, \mathfrak{U})$ ノ元ト一對一、且ツ可逆ニ isomorph. 此ノ事ハ $(\gamma, \delta)$ Transformation ノ各段階デ変ラナイ。

次ニ $(\gamma, \delta)$ Transformation ヲ $K'_{0i}$ 迄強制的ニ行ヒ $K'_{0\,i+1}$ デ始メテ出テ来ル Strecke ニハ $\gamma$ 及ビ

δデ表ハサレタ長イ Automorphismus ヲ對應サセタ überdeckung U デ $i$ 次元及ビ $i+1$ 次元 Homologiegruppe ガ節ト isomorph ナル事ヲ証明スル要ガアル。面倒デハアルガ容易ニ出来ルカラ証略スル。

<u>定理2.</u> $n$ 次元ノ閉ヂタ orientierbare Mannigfaltigkeit $M^n$ ノ wesentlich ナ Überdeckung デハ $n$ 次元 Homologiegruppe ハ 0 デアル。

<u>証明:</u> wesentlich ナ überdeckung デアルカラ $M^n$ ノ基本群ノ Charakter ハ trivial デハナイ。[1] I デナイ Automorphismus $\gamma$ ニ對應スル閉道ヲ $w$ トスル。$n$ 次元単体連鎖デ $w$ ト homotop ナモノヲ

$$T_1^n,\ T_2^n,\ \cdots\cdots,\ T_i^n,\ T_1^n$$

トスル。$T_i^n$ ト $T_{i+1}^n$ トハ唯一ツノ $(n-1)$ 次元単体

$$T_{i\,i+1}^{n-1}$$

ヲ共有スル。

定理1ニ依ッテ與ヘラレタ überdeckung ト等シイ Betti 群ヲ持ツ überdeckung ヲ次ノ如ク定メルコトガ出来ル。即チ

---

1) 一様連結ナ複体ニハ wesentlich ナ überdeckung ハ存在シナイ。

$$T^n_j \xrightarrow{I} T^{n-1}_{j\,j+1} \qquad j=1,2,\cdots\cdots,i.$$

$$T^{n-1}_{j\,j+1} \xrightarrow{-I} T^n_{j+1} \qquad j=1,2,\cdots\cdots,i-1$$

$$T^{n-1}_{i\,1} \xrightarrow{-\gamma} T^n_1$$

トトル。是レデ Weg $w$ ニハ $\gamma$ ガ對應シ與ヘラレタ überdeckung ト等シイ Darstellung ヲ持ツ überdeckung デアル。

此ノ überdeckung $\mathfrak{U}$ デハ $n$ 次元 Zyklus $Z^n$ トＯナルモノ存在シナイ。

若シ存在シタトスルナラバ

$$Z^n : T^n_k \longrightarrow \alpha \in \mathfrak{G}. \quad \alpha \neq 0$$

ナル $T^n_k$ 存在ス. 然ラバ Zyklus ナルコトト, Mannigfaltigkeit ナルコトトヨリ $T^n_{k+1} \longrightarrow \alpha$ デナクテハナラヌ. 結局

$$Z^n ; \; T^n_i \longrightarrow \alpha$$

$$T^n_1 \longrightarrow \alpha$$

デアル. 然ルニ Rand $T^{n-1}_{i\,1}$ デノ値ハ

$$T^{n-1}_{i\,1} \longrightarrow (\alpha) - \gamma^{-1}(\alpha) = (1-\gamma^{-1})(\alpha)$$
$$\neq 0 \in \mathfrak{G}$$

デアル. 即チ $Z^n$ Zyklus デナクナル。　　—以上—

定理２ハ証明カラ分ル通リ Pseudomannigfaltigkeit デモ同様デアル。

次ニ Komplex ノ Simpliziale Abbildung ノトキ，ベッチ群ハ如何ニナルカ、Überdeckung ノトリ方デ群ハ全然変ッテ仕舞フカラ Überdeckung ノ條件ヲモ附加シナクテハナラナイ。Überdeckung トシテノ Abbildung ノ條件ハ[1)]

$$f: K_1 \longrightarrow K_2 \quad \text{Simplizial}$$

$$\text{in } K_1 \quad T_1^n > T_1^{n-1} \quad \gamma_{11}^n$$

$$\text{in } K_2 \quad f(T_1^n) > f(T_1^{n-1}) \quad \gamma^p$$

トスレバ　$\gamma_{11}^n = \gamma^p$

ナルコトデアル。故ニ $f(T_1^n) = \pm f(T_1^{n-1})$ ナラバ $\gamma^p = \pm I$ ヲトル. 符号ハ $f(T_1^n)$ ハ ausarten スルノダガソレヲ正ト考ヘルカ負ト考ヘルカニ依ッテ異ナル überdeckung ノ場合，ベッチ群ニ影響ナイコトハ定理1ニヨル。即チ

$$T_2^{n-1} < T_1^n > T_1^{n-1}$$

$$f(T_1^{n-1}) = -f(T_2^{n-1})$$

故ニ $\gamma_{11}^p = +I$ ナラ $\gamma_{12}^p = -I$. $\pm I$ ガ何レデモ交互ニ生ズル。

<u>定理3.</u> $K_1^n$ ノ u-überdeckung ガ $K_2^n$ ノ u-überdeckung ニ simplizial ニ abbilden サレル.

---

1)　本誌第　　号, Kompaktum ノ überdeckung ニ於テ述ヘテアル。

然ラバ $B_u^i(K_1^n)$ ハ $B_u^i(K_2^n)$ ノ中ヘ homomorph = abbilden サレル。

証明： 普通ノ場合ト変ハラヌ。

Komplex ノ Homologie ノ性質カラ Simpliziale Abbildung ノ性質ヲ規定スル コトハ度々行ハレル。例ヘバ $M_1^n$ ノ $i$ 次元ベッチ数 $p_1^i$，$M_2^n$ ノ $i$ 次元ベッチ数 $p_2^i$ トシ $p_1^i > p_2^i$ ナラバ $M_2^n$ カラ $M_1^n$ ヘノ wesentlich Auf ノ Abbildung ハ存在シナイ。所ガ定理 1，2，3 ヲ使ッテ überdeckung ノ Homologie ヲ使ッテ Abbildung ノ性質ヲ規定スルコトモ可能ナワケデアル。又逆ノ制限モ可能デアル。コレ等ノ関係ヲ調ベルノモ überdeckung ノ一ツノ大切ナ問題デアルト思フ。