OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	V. Šmulian : Banach空間 ノ Principle of inclusion二就テ, II
Author(s)	樋口, 順四郎
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 190, p. 592-600
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74756
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

825. V. Šmulian: Banach 空間ノ principle of inclusion ニ就テ, II

樋口順四郎（阪大）

III. 前号デハ共軛空間 $\overline{E}$ ハ全然考ヘニ入レナカッタ.

以下デハ空間 $\overline{E}$ ヲ考ヘル. $G \subset \overline{E}$ ヲ任意ノ集合トス

ルトキ，Gト Gノ element ノスベテノ transfinite sequence ノ transfinite limit[9] ノ和集合ヲ G_1ト書キ，G_1ヲ含ム最小ノ convex closed set ヲ G_1^cデ表ハス．ξくξ₀ニ対シテハスデニ G_ξ, G_ξ^cガ定義サレテオル時 G_{ξ_0}ヲ次ノ様ニ定メル．

a) ξ_0-1 ガ存在スルナラ

$$G_{\xi_0}=\left(G_{\xi_0-1}^c\right)_1,$$

b) ξ_0-1 ガ存在シナケレバ

$$G_{\xi_0}=\sum_{\xi<\xi_0} G_\xi .$$

$G_{\xi_0}^c$ ハ G_{ξ_0}ヲ含ム最小ノ convex closed set ト定義スル．コノトキ適當ナ ϑ ガ定マッテ G_ϑ^cハ convex デ transfinitely closed ニナル事ハ明デアル．

Lemma 5 $f_\xi(x)\xrightarrow{\vartheta} f_0(x)$ トナルタメノ必要且ツ充分ナ條件ハ スベテノ f_ξヲ含ム任意ノ convex transfinitely closed set ガ f_0ヲ含ムコトデアル．

証： 必要條件デアルコトハ明デアル．充分ナコトヲ

---

9) $f_0(x)$ ガ $\{f_\xi(x)\}_{\xi<\vartheta}$ ノ transf. limit デアルトキ

$f_\xi(x)\xrightarrow{\vartheta} f_0(x)$ ト書クコトニスル．コレハ任意ノ $x\in E$ ニツイテ $\varliminf_{\xi\to\vartheta} f_\xi(x)\leqq f_0(x)\leqq \overline{\lim}_{\xi\to\vartheta} f_\xi(x)$ ガ成立スルコト．

証明スル。今 $\overline{\lim} f_\xi(x') < f_0(x')$ デアレバ $\xi \geq \xi_0$ ト充分ニ小サナ ε_0 ニ對シテ

$$f(x') \leq f_0(x') - \varepsilon_0, \quad f = f_\xi \quad (8)$$

ガ成立スル。Gヲ $\xi \geq \xi_0$ デアル f_ξ ノ全体トシ，上述ノ convex transfinitely closed set G^c_ϑ ヲ作ル。(8)ハスベテノ $f \in G^c_\vartheta$ デ成立スル。シカルニ $f_0 \in G^c_\vartheta$ デアルカラ $f_0(x') \leq f_0(x') - \varepsilon_0$，之レハ矛盾デアル。

Lemma 6 $\{f_n\}$ ガ f_0 ニ弱収斂スルタメノ必要且ツ充分ナ條件ハ $\{f_n\}$ ノ殆ンドスベテヲ含ム functional トシテ weakly closed + convex set ガ f_0 ヲモ含ムコトデアル。

証： Lemma 5 ト同様ニデキル。

Lemma 7 linear subspace $F \subset \overline{E}$ ノ unit sphere ガ ϑ-closed[10] ナルタメニハ有界 + convex; transfinitely closed set ノ任意ノ減少系列

$$K_1 \supseteq K_2 \supseteq \cdots\cdots \supseteq K_\xi \supseteq \cdots\cdots, \quad K_\xi \cdot F \neq \Lambda \quad (1 \leq \xi < \vartheta)$$

ガ F ニ属スル共通点ヲ持ツコトガ必要且ツ充分デアル。

証： Lemma 5 カラ容易ニ証明デキル。

linear subspace $F \subset \overline{E}$ ガ regularly closed ナタメニハ，F ノ unit sphere ガ transfinitely

---

10) $\mathfrak{M}$ ガ ϑ-closed トハ $f_\xi(x) \xrightarrow{\vartheta} f_0(x)$, $f_\xi \in \mathfrak{M}$ ナラ $f_0 \in \mathfrak{M}$ トナルコト。

closedデアルコトガ必要且ツ充分デアルカラ，Lemma 7 カラ次ノ定理ヲ得ル。

定理6 E ノ線状部分空間 F が regularly closed ナタメニハ有界ナ convex, transf. closed set ノ任意ノ減少系列。

$$K_1 \supseteq K_2 \supseteq \cdots\cdots \supseteq K_\xi \supseteq \cdots\cdots,$$

$$K_\xi \cdot F \neq \Lambda \quad (1 \leqq \xi < \vartheta,\ \vartheta \text{ ハ任意}) \cdots (9)$$

ガ F ニ属スル共通点ヲ持ツコトガ必要且ツ充分デアル。

定理6ヲ用ヒルト，定理5ト同様ナ次ノ定理ガ証明サレル。

定理7 E ノ線状部分空間 F ノ unit sphere ガ w-closed ト仮定スル。F が regularly closed ナタメニハ，E ノ Unit sphere $\|f\| \leqq 1$ ノ内ノ convex, transfinitely closed set ノ任意ノ減少系列 (9) (但シ $K_\xi \cdot F$ ハ $\|f\| = 1$ ノ表面ニアルトスル) ガ F ニ属スル共通点ヲ持ツコトガ必要且ツ充分デアル。

注意 F ノ Unit sphere ノ表面上ノ convex, w-closed set ガ separable ナラ定理ノ條件ヲ満足スル。依ツテ

系 F ノ unit sphere ノ表面上ノ convex closed set ガ separable ナラ，F が regularly closed ナタメニハ，ソノ unit sphere が w-closed ナコトガ必要且ツ充分デアル。

コノ定理カラ

定理8 F が $\bar{E}$ ノ separable subspace ナラバ，F が regularly closed ナルメニハ有界ナル convex transfinitely closed set ノ denumerable sequence.

$$K_1 \supseteq K_2 \supseteq \cdots\cdots \supseteq K_n \supseteq \cdots\cdots \quad K_n \cdot F \neq 0$$

ガ F ニ属スル共通点ヲ持ツコトガ必要且ツ充分デアル。

Ⅳ. **Lemma 8** H ヲ $\bar{E}$ ノ任意ノ separable subspace トスルト，separable subspace $G \subset E$ ヲ適當ニトレバ $H \subset \bar{G}$ トナル。

証： H デ dense ナル $\{f_n\}$ ヲ取ル。f_n ニ對應シテ $\{x_n^{(k)}\}_{k=1,2,\cdots}$ ヲ次ノヤウニヤメル。

$$\|x_n^{(k)}\| = 1, \quad \lim_{k\to\infty} f_n(x_n^{(k)}) = \|f_n\|.$$

$\{x_n^{(k)}\}_{n,k=1,2,\cdots}$ ヲ含ム最小ノ linear closed set ヲ G トスル。G ハ E ノ separable subspace デ，H ニ属スル f ハ勿論 G デモ定義サレテヰル。identically zero デハナク $\{x_n^{(k)}\}$ ト orthogonal ナル linear functional ヲ f_0 トスル（$f_0 \in \bar{G}$）。f_0 ヲ norm ヲ上ゲヌ様ニ E ヘ拡張シタモノヲ F_0 トスル $\|F_0\|_E = \|f_0\|_G \neq 0$. 明ラカニ $F_0 \in H$。

Lemma 9 $M \subset \bar{E}$ ヲ separable ナル有界集合トスル。$\{f_n\}_{n=1,2,\cdots}$（$f_n \in M$）ニハ $f_n(x) \xrightarrow{\omega} f(x)$ トナル f. ガ對應シテヰル。スベテノ $\{f_n\}$ ニ對シテ出来ル f ノ集合 H が separable ナラバ M ハ（functional ノ

弱収斂デ）weakly compact デアル。

証：$\mathfrak{M}+H$ ヲ含ム最小ノ closed linear set ヲ E_1 トスル。E_1 ハ $\bar{E}$ ノ separable subspace デアル。Lemma 9 ニヨリ separable subspace $G\subset E$ ヲトッテ $E_1\subset\bar{G}$ ナラシメル。G デ dense ナ elements ヲ $\{x_n\}_{n=1,2,\cdots\cdots}$ トスル。$f\in E_1$ デ $f(x_n)=0$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ ナラ $f=0$ デアルコトハ G ノ作リ方カラ明デアル。

$\{f_n\}_{n=1,2,\cdots\cdots}$ ヲ $\mathfrak{M}$ ノ系列トセヨ。$\{f_n\}$ ハ $\lim_n f_n(x_\nu)$ $(\nu=1,2,\cdots\cdots)$ ガ存在スルモノト假定シテモヨイ（サウデナケレバ部分列ヲトル）。今スベテノ $x\in E$ デ $\lim_n f_n(x)$ ガ存在スルコトヲ証明シヨウ。モシ $x'\in E$ デ $\lim_n f_n(x')$ ガ存在シナイナラバ二ツノ部分列 $\{f'_{n_i}\}$, $\{f''_{n_i}\}$ ガアッテ x' デ各々異ナル極限ヲモツ。一方假定カラ $f', f''\in E_1$ ガ存在シテ

$$\underline{\lim_{i\to\infty}} f'_{n_i}(x)\leqq f'(x)\leqq \overline{\lim_{i\to\infty}} f'_{n_i}(x),$$

$$\underline{\lim_{i\to\infty}} f''_{n_i}(x)\leqq f''(x)\leqq \overline{\lim_{i\to\infty}} f''_{n_i}(x)$$

ガ任意ノ $x\in E$ デ成立スル。シカモ x_ν $(\nu=1,2,\cdots\cdots)$ デハ $\lim f'_{n_i}(x_\nu)=\lim f''_{n_i}(x_\nu)$。從ッテ $f'-f''=f$ トオケバ $f\in E_1$, $f(x_\nu)=0$ $(\nu=1,2,\cdots\cdots)$。故ニ identically ニ $f=0$。之ハ $f(x')\neq 0$ ニ矛盾スル。即チ $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ ハ存在スル。コレハ $\mathfrak{M}$ ガ weakly

compact ナコトヲ外ナラヌ。

定理 9 $\mathfrak{M}$ ヲ $\overline{E}$ ノ (functional ノ弱収斂デ) weakly closed な separable set トスル。$\mathfrak{M}$ ガ (functioned ノ弱収斂デ) weakly compact ナタメニハ $K_n \cdot \mathfrak{M}$ ナル任意ノ denumerable sequence

$$K_1 \supseteq K_2 \supseteq \cdots\cdots \supseteq K_n \supseteq \cdots\cdots$$

ニ共通ナ $\mathfrak{M}$ ノ点ガ存在スルコトガ必要且ツ充分デアル。

証. Lemma 5, 9 カラ容易ニワカル。

次ニ Lemma 9 ヨリ直チニ含ル事実ヲ列挙シヨウ。

1°. $f_n \in \overline{E}$, $\|f_n\| \leq 1$ $(n = 1, 2, \cdots\cdots)$ ガ与ヘラレタ時, モシ

$$\varliminf_{n\to\infty} f_n(x) \leq f(x) \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x)$$

for all $x \in E$

トナル $f \in \overline{E}$ ノ集合ガ separable ナラ $\{f_n\}$。weakly compact デアル (functional ノ弱収斂ノ意味デ).

2°. $x_0 \in E$ $\|x_0\| = 1$ ガ与ヘラレタトスル。x_0 ニ於ケル unit sphere $\|x\| \leq 1$ ノ Stützhyperebene ヲ $f(x) = 1$ トスレモシ $\{f\} \in \overline{E}$ が separable デ $f_n(x_0) \to 1$ (但シ $\|f_n\| \leq 1$) ナラ $\{f_n\}$ ハ weakly compact デアル。

$\mathfrak{M} \subset E$ ノ任意ノ sequence $\{x_n\}$ カラ適当ニ部分

列 $\{x_{n_i}\}$ ヲ選ビ出セバ，スベテノ $f \in \overline{E}$ ニ對シテ $\lim f(x_{n_i})$ が存在スルトキ，$\mathfrak{M}$ ハ conditionally weakly compact デアルト云フ。

$\{x_n\}$ ノ弱收斂ハ $F_n(f) \equiv f(x_n)$ ノ弱收斂ト同ジコトデアルカラ Lemma 9 ト，上ノ 1°, 2° カラ

3°. $\mathfrak{M} \subset E$ ヲ有界，separable set トスル．任意ノ系列 $\{x_n\}_{n=1,2,\cdots\cdots}$ $(x_n \in \mathfrak{M})$ ニ次ノ様ナ $F \in \overline{\overline{E}}$ ヲ對應サセル。

$$\underline{\lim}\, f(x_n) \leq F(f) \leq \overline{\lim}\, f(x_n) \qquad \text{for all } f \in \overline{E}$$

コノ $F(f)$ ノ全体ヲ H トスル．モシ H が separable ナラバ $\mathfrak{M}$ ハ conditionally weakly compact デアル。

4°. $x_n \in E$, $\|x_n\| \leq 1$ $(n = 1, 2, \cdots\cdots)$ ガ與ヘラレタトスル。

モシ

$$\underline{\lim}\, f(x_n) \leq F(f) \leq \overline{\lim}\, f(x_n) \qquad \text{for all } f \in \overline{E}$$

トナル $F \in \overline{\overline{E}}$ ノ全体ガ separable ナラ $\{x_n\}$ ハ cond. weakly compact デアル。

5°. $f_0 \in \overline{E}$, $\|f_0\| = 1$ ガ與ヘラレタトスル。$\|f\| \leq 1$ ノ f_0 ニ於ケル Stütz hyperebene $F(f) = 1$ ガ separable set $\{F\} \subset \overline{\overline{E}}$ ヲナシ，$f_0(x_n) \longrightarrow 1$ $(\|x_n\| \leq 1)$ ナラバ $\{x_n\}$ ハ cond. weakly

compact デスク。