



Title	V. Šmulian : Banach空間 ノ Principle of inclusion二就テ, II
Author(s)	樋口, 順四郎
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 190, p. 592-600
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74756
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

825. V. Šmulian: Banach 空間 /
principle of inclusion = 就テ, II

樋口 順四郎 (阪大)

III. 前号デハ共軛空間 $\bar{E}$ ハ全然考ヘ = 入レナカ
ツタ。

以下デハ空間 $\bar{E}$ ヲ考ヘル。 $G \subset \bar{E}$ ヲ任意ノ集合トス

ルトキ, G ト G の element, スベテ, transfinite sequence, transfinite limit⁹⁾, 和集合ヲ G_1 ト書キ, G_1 ヲ含ム最小ノ convex closed set ヲ G_1^c デ表ハス. $\xi < \xi_0$ に対シテハ $G_\xi = G_\xi^c$ が定義サレテオレル特 G_{ξ_0} ヲ次ノ様ニ定メル.

a) $\xi_0 - 1$ が存在スルナラ

$$G_{\xi_0} = (G_{\xi_0-1}^c)_1,$$

b) $\xi_0 - 1$ が存在シナケレバ

$$G_{\xi_0} = \sum_{\xi < \xi_0} G_\xi.$$

$G_{\xi_0}^c$ ハ G_{ξ_0} ヲ含ム最小ノ convex closed set ト定義スル. コノトキ適當ナ ϑ が定マツテ G_ϑ^c ハ convex デ transfinitely closed = ナル事ハ明デアアル.

Lemma 5 $f_\xi(x) \xrightarrow{\vartheta} f_0(x)$ トナルタメノ必要且ツ充分ノ条件ハ スベテノ f_ξ ヲ含ム任意ノ convex transfinitely closed set が f_0 ヲ含ムコトデアアル.

証: 必要條件デアアルコトハ明デアアル. 充分ノコトヲ

9) $f_0(x)$ が $\{f_\xi(x)\}_{\xi < \vartheta}$ ノ transf. limit デアルトキ

$f_\xi(x) \xrightarrow{\vartheta} f_0(x)$ ト書クコト = スル. コレハ任意ノ $x \in E$

= ツイテ $\lim_{\xi \rightarrow \vartheta} f_\xi(x) \leq f_0(x) \leq \overline{\lim_{\xi \rightarrow \vartheta} f_\xi(x)}$ が成立スルコト.

証明スル。今 $\overline{\lim} f_\varepsilon(x') < f_0(x')$ デアルバ $\varepsilon \geq \varepsilon_0$ ト充分
= 小サナ ε_0 = 對シテ

$$f(x') \leq f_0(x') - \varepsilon_0, \quad f = f_\varepsilon \quad (8)$$

が成立スル。 G 7 $\varepsilon \geq \varepsilon_0$ デアル f_ε 1 全体トシ, 上述ノ
convex transfinitely closed set G_ϑ^c 7 作
ル。 (8) ハ スベテノ $f \in G_\vartheta^c$ デ成立スル。 シカル $= f_0 \in G_\vartheta^c$
デアルカウ $f_0(x') \leq f_0(x') - \varepsilon_0$, 之レハ矛盾デアイル。

Lemma 6 $\{f_n\}$ が f_0 = 弱收歟スルタメノ必要
且ツ充分ナ條件ハ $\{f_n\}$ ノ 殆ンドスベテヲ含ム functional
トシテ weakly closed + convex set が f_0 7 包
含ムコトデアイル。

証: Lemma 5 ト同様ニデアイル。

Lemma 7 linear subspace $F \subset \bar{E}$ 1 unit
sphere が ϑ -closed¹⁰⁾ ナルタメニハ 有界 + convex;
transfinitely closed set ノ 任意ノ 減少
系列

$$K_1 \supseteq K_2 \supseteq \dots \supseteq K_\varepsilon \supseteq \dots, \quad K_\varepsilon \cdot F \neq \Lambda \quad (1 \leq \varepsilon < \vartheta)$$

が F = 属スル共通点ヲ持ツコトが必要且ツ充分デアイル。

証: Lemma 5 カラ容易ニ証明デアイル。

linear subspace $F \subset \bar{E}$ が regularly closed
ナタルタメニ, F 1 unit sphere が transfinitely

10) $\mathcal{M}$ が ϑ -closed ナルハ $f_\varepsilon(x) \xrightarrow{\vartheta} f_0(x)$, $f_\varepsilon \in \mathcal{M}$ ナラ
 $f_0 \in \mathcal{M}$ トナルコト。

closed がアルコトが必要且つ充分デアルカラ, Lemma 7
カラ次ノ定理ヲ得ル。

定理 6 $\bar{E}$ ノ線状部分空間 F が regularly closed
+ $\alpha \times \alpha = \alpha$ 有界 + convex, transf. closed set 1 任
意ノ減少系列。

$$K_1 \supset K_2 \supset \dots \supset K_\xi \supset \dots,$$

$$K_\xi \cdot F \neq \Lambda \quad (1 \leq \xi < \mathcal{J}, \mathcal{J} \text{ ハ任意}) \dots (9)$$

が $F =$ 属スル共通点ヲ持つコトが必要且つ充分デアル。

定理 6 ヲ用ヒルト, 定理 5 ト同様ナ次ノ定理ガ証明
サレル。

定理 7 $\bar{E}$ ノ線状部分空間 F ノ unit sphere
が ω -closed ト板定スル。 F が regularly closed
+ $\alpha \times \alpha = \alpha$, E ノ unit sphere $\|f\| \leq 1$ 内ノ convex,
transfinitely closed set ノ任意ノ減少系列 (9)
(但シ $K_\xi \cdot F$ ハ $\|f\| = 1$ ノ表面 = アルトスル) が $F =$ 属
スル共通点ヲ持つコトが必要且つ充分デアル。

注意 F ノ unit sphere ノ表面上ノ convex,
 ω -closed set が separable ナラ定理ノ條件ヲ満足
スル。依ツテ

系 F ノ unit sphere ノ表面上ノ convex
closed set が separable ナラ, F が regularly
closed + $\alpha \times \alpha = \alpha$, γ ノ unit sphere が ω -closed
+ コトが必要且つ充分デアル。

コノ定理カラ

定理 8 F が $\bar{E}$ の separable subspace ならば, F が regularly closed かつ $\alpha = \beta$ 有界かつ convex transfinitely closed set, denumerable sequence.

$$K_1 \supseteq K_2 \supseteq \dots \supseteq K_n \supseteq \dots \quad K_n \cdot F \neq 0$$

が $F =$ 属スル共通点ヲ持ツコトが必要且ツ充分デアル。

IV. Lemma 8 H が $\bar{E}$ の任意の separable subspace トナルト, separable subspace $G \subset E$ が適當ニトレバ $H \subset \bar{G}$ トナル。

証: H が dense かつ $\{f_n\}$ を取ル。 $f_n =$ 對應シテ $\{x_n^{(k)}\}_{k=1,2,\dots}$ を取ル。 $x_n^{(k)} = x_n^{(k)}$ ナル。

$$\|x_n^{(k)}\| = 1, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f_n(x_n^{(k)}) = \|f_n\|.$$

$\{x_n^{(k)}\}_{n,k=1,2,\dots}$ を含ム最小の linear closed set を G トスル。 G は E の separable subspace デ, $H =$ 属スル f は勿論 G デモ定義サレテキル。 identically zero デハナク $\{x_n^{(k)}\}$ ト orthogonal かつ linear functional f_0 トスル ($f_0 \in \bar{G}$)。 f_0 が norm 7 上げヌ様ニ E へ拡張シタモノヲ F_0 トスル $\|F_0\|_E = \|f_0\|_G \neq 0$ 。 明ヲカ $F_0 \in H$ 。

Lemma 9 $M \subset \bar{E}$ が separable かつ有界集合トスル。 $\{f_n\}_{n=1,2,\dots}$ ($f_n \in M$) $= \wedge f_n(x) \xrightarrow{\omega} f(x)$ トナル f が對應シテキル。 スベテノ $\{f_n\} =$ 對シテ出来ル f の集合 H が separable かつ M へ (functional,

弱収斂デ) weakly compact デアル。

証: $M+H$ を含ム最小ノ closed linear set
ヲ E_1 トスル。 E_1 ハ $\bar{E}$ ノ separable subspace デ
アル。 Lemma 9 =ヨリ separable subspace
 $G \subset E_1$ ヲトツテ $E_1 \subset \bar{G}$ ナラシメル。 G デ dense f
elements ヲ $\{x_n\}_{n=1,2,\dots}$ トスル。 $f \in E_1$ デ $f(x_n)$
 $= 0$ ($n=1, 2, \dots$) ナラ $f=0$ デアルコトハ G ノ作リ
方カラ明デアル。

$\{f_n\}_{n=1,2,\dots}$ ヲ M ノ系列トセヨ。 $\{f_n\}_n \lim_n f_n(x_\nu)$
($\nu=1, 2, \dots$) が存在スルモノト假定シテモヨイ (サウデ
ナケレバ部分列ヲトル)。 今スベテノ $x \in E$ デ $\lim_n f_n(x)$
が存在スルコトヲ証明シヨ。 $\varepsilon > 0$ $x' \in E$ デ $\lim_n f_n(x')$
が存在シナイナラニツノ部分列 $\{f'_{n_i}\}, \{f''_{n_i}\}$ ガアツ
テ x' デ各々異ナル極限ヲ有ス。 一方假定カラ $f', f'' \in E_1$
が存在シテ

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f'_{n_i}(x) \leq f'(x) \leq \overline{\lim_{i \rightarrow \infty} f'_{n_i}(x)},$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f''_{n_i}(x) \leq f''(x) \leq \overline{\lim_{i \rightarrow \infty} f''_{n_i}(x)}$$

が任意ノ $x \in E$ デ成立スル。 シカモ x_ν ($\nu=1, 2, \dots$)
デハ $\lim_{i \rightarrow \infty} f'_{n_i}(x_\nu) = \lim_{i \rightarrow \infty} f''_{n_i}(x_\nu)$ 。 従ツテ $f' - f''$
 $= f$ ト書ケルハ $f \in E_1$, $f(x_\nu) = 0$ ($\nu=1, 2, \dots$)。 故
 $= \text{identically} = f = 0$ 。 之ハ $f(x') \neq 0$ = 矛盾ス
ル。 即チ $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ ハ存在スル。 コレハ M ハ weakly

compact + コト = 外ナラヌ。

定理 9 $M \subset E$, (functional, 弱収斂) $\Rightarrow$

weakly closed + separable set トスル。

M が (functional, 弱収斂) weakly compact + $x = \bigcap K_n$, $M \subset \bigcap K_n$ weakly closed convex set, 任意, denumerable sequence

$$K_1 \supset K_2 \supset \dots \supset K_n \supset \dots$$

= 共通 M の点が存在スルコトが必要且ツ充分デアル。

証. Lemma 5, 9 カラ容易ニワカル。

次ニ Lemma 9 オヲ直チニル事實ヲ列挙シヨウ。

1°. $f_n \in E$, $\|f_n\| \leq 1$ ($n=1, 2, \dots$) が與ヘラレタ時, $\exists$ $f \in E$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \leq \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)}$$

for all $x \in E$

トスル $f \in E$ の集合が separable + $\{f_n\}$ 。

weakly compact デアル (functional, 弱収斂の意味)。

2°. $x_0 \in E$, $\|x_0\| = 1$ が與ヘラレタトスル。 x_0 是於 x unit sphere $\|x\| \leq 1$ の Stützhyperebene $f(x) = 1$ トスル $\exists \{f\} \in E$ が separable $\Rightarrow f_n(x_0) \rightarrow 1$ (但し $\|f_n\| \leq 1$) + $\{f_n\}$ は weakly compact デアル。

$M \subset E$, 任意, sequence $\{x_n\}$ カラ適當ニ部分

列 $\{x_{n_i}\}$ を選ビ出セバ, スベテ $f \in \bar{E} =$ 對シテ
 $\lim f(x_{n_i})$ が存在スルヲ, M は conditionally
 weakly compact デアルト云フ.

$\{x_n\}$, 弱收斂ハ $F_n(f) \equiv f(x_n)$, 弱收斂ト同ジコ
 トデアルカラ Lemma 9 ト, 上ノ 1°, 2° カラ

3°. $M \subset E$ ヲ有界, separable set トスル. 任
 意ノ系列 $\{x_n\}_{n=1,2,\dots}$ ($x_n \in M$) = 次ノ様ニ $F \in \bar{E}$
 ヲ對應サセル.

$$\underline{\lim} f(x_n) \leq F(f) \leq \overline{\lim} f(x_n)$$

for all $f \in \bar{E}$

コノ $F(f)$ ノ全体ヲ H トスル. $\forall H$ が separable
 トラバ M は conditionally weakly compact
 デアル.

4°. $x_n \in E$, $\|x_n\| \leq 1$ ($n=1,2,\dots$) が與ヘラレ
 タトスル.

$\forall \epsilon > 0$

$$\underline{\lim} f(x_n) \leq F(f) \leq \overline{\lim} f(x_n)$$

for all $f \in \bar{E}$

トナル $F \in \bar{E}$, 全体が separable トラ $\{x_n\}$ は cond.
 weakly compact デアル.

5°. $f_0 \in \bar{E}$, $\|f_0\|=1$ が與ヘラレタトスル.

$\|f\| \leq 1$, $f_0 =$ 於ケル Stütz hyperplane $F(f)=1$
 が separable set $\{F\} \subset \bar{E}$ ヲナシ, $f_0(x_n)$
 $\rightarrow 1$ ($\|x_n\| \leq 1$) トラバ $\{x_n\}$ は cond. weakly

compact 7" 7 1/2.