



Title	Mannigfaltigkeit への連続変換 III
Author(s)	小松, 醇郎
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 191, p. 618-630
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74759
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

828. Mannigfaltigkeit へ, 連続変換 III

小 松 醇 郎 (阪大)

定理 I K^n が Mannigfaltigkeit $M^n =$ wesentlich auf $=$ abbilden +
レレバ K^n / 或ル Überdeckung $=$ 関シテ $\uparrow 0$ +
 0 -Zyklus Z^n が存在スル。

コレハ本誌、第 189 号、談話 818、533 頁終リ =
述べタコトヲアルが証明ハソウ簡單デハナカッタ。又次元
ヲ更ヘテ K^m が M^n へトシタトキハ具合ノ悪イトコロガ
出テ來ル。

先ヅ $S^m \rightarrow M^n$ / wesentlich auf + Abbil-
dungsklasse 7 Charakterisieren スル問題
ヲ調べル。

定義. $\pi^m(M^n)$ / 元 / 中デ S^m / Bildmenge
が高々 $(n-1)$ 次元 $=$ ナルヤウナ元凡ベテハ $\pi^m(M^n)$
ノ部分群ヲ成ス。

ソレ $=$ 関スル Faktorgruppe $\mu^m(M^n)$ ハ、
ソノ元 ($\neq 0$) 7 表ハス所ノ Bildmenge ハ凡テ n 次元
デアル。

$|f(S^m)| = |M^n|$ (Punktmenge トシテ), 此
ノ f 7 表ハス元 α ($\in \mu^m(M^n)$) $\neq 0$ トスル。今
 Z^{n+1} 7 一点 $=$ Identifizieren シテ Sphäre S^n

ヲ考ヘレバ $f: S^m \rightarrow S^n$ 故 $= \pi^m(S^n)$ ノ或ル元
 $f(\alpha)$ ガ對應セシメラル。對應

$$f: \alpha \longrightarrow f(\alpha)$$

ハ $\mu^m(M^n) \rightarrow \pi^m(S^n)$, homomorph in ,
 對應デアル。 $\mu^n(M^n) \rightarrow \pi^n(S^n)$, isomorph
 in デアル。即チ $S^n \rightarrow M^n$ + ル wesentlich auf
 + Abbildung , (n-1) 次元以下ヲ無視スレバノ
 Grad デ Charakterisieren セレル。

補助定理 I. M^n が單純連結ナラバ上ノ對應 f

$$\mu^m(M^n) \longrightarrow \pi^m(S^n)$$

ハ isomorph in デアル。

証明: 對應ガ isomorph デナイトレテ Kern =
 含マレル元 $\alpha \neq 0$ ヲトレバ α ヲ與ヘル連続変換 f デハ
 $|f(S^m)| = |M^n|$, $q \in M^n$, $q \in \mathbb{Z}^{n-1}$, 原像 $f^{-1}(q)$
 ハ M^n 單純連結ナル故 = , 一ツノ (m-n) 次元 Mannig-
 faltigkeit M^{m-n} デアル。¹⁾ n - 單体 T^n (開集合),
 T^n ヲ q ヲトレバ $f^{-1}(T^n)$ ハ M^{m-n} ト n 單体 T ノ topolo-
 gisches Produkt デアル。即チ

$$f^{-1}(T^n) = T^n \times M^{m-n}$$

且ツ $f^{-1}(T^n)$ ノ境界ハ $f = \exists$ リ $T^n =$ 移ル。此ノ局部的

1) H. Freudenthal: über die Klassen der
 Sphärenabbildungen. I. Comp. Math. 5
 (1937). 299

1) 変換 $f: S^m \rightarrow S^n = \text{erweitern}^{2)}$ スレバ假定 =
 ヲリ $\pi^m(S^n)$ 1 0 元 = +1. α ヲ 與ヘル 変換 f デ $\mathbb{Z}^{n+1}$
 ヲ 一 点 = Identifizieren シタ モ ノ デアル。

$\pi^m(S^n)$ 1 0 元 ガ カラ, f ト 等 シイ Klasse デ q ,
 従ッテ $\mathbb{T}^n$ ノ 原像 ガ ナイ (空集合) モ ノ 存在 ス。之レハ
 $\mathbb{Z}^{n+1}$ ヲ Identifizieren シタ 一 点 ノ 原像 ヲ fixed
 = シ テ 出 来 ル。

従ッテ 之レハ $f: S^m \rightarrow M^n$ ノ 変換 ト 考ヘタ 場 合 =
 wesentlich auf $\mathbb{T}^{+1}$. 之レハ $\mu^m(M^n)$ 1 0 $\mathbb{T}^{+1}$
 1 元 $\alpha =$ 矛盾 スル。故ニ $f_2: \mu^m(M^n) \rightarrow \pi^m(S^n)$
 ハ isomorph.

補助定理 2。 $S^m \rightarrow M^n$, wesentlich auf $\mathbb{T}$
 Abbildungsgruppe $\mu^m(M^n)$ ハ $p \pi^m(S^n)^* =$
 homomorph in = zuordnen サレル。

証明: lemma 1, 假定。即チ M^n 單純連結ナル條
 件ヲ 除イタモ ノ デアル。 M^n ノ universelle überlage-
 rungsraum $\tilde{M}^n$ ヲ 作ル。 M^n 及ビ $\tilde{M}^n$ 共 =
 kompakt デアル。

2) L. Pontryagin: A classification of continuous
 transformations of a complex into a
 sphere I. Comptes Rendus (Moscow) 19 (1938)

* p ハ 整 数。 $\pi^m(S^n)$ 1 元 凡テ p 倍 シタ モ ノ ノ 作ル 部分群。
 p ハ $M^n =$ 閉シテ 一 意 = 定ル 数。

$\pi^m(M^n) \rightarrow \pi^m(\tilde{M}^n) \rightarrow$ isomorph である。
(W. Hurewicz).

$\mu^m(M^n) \rightarrow \mu^m(\tilde{M}^n) \rightarrow$ isomorph である。
 $\tilde{M}^n \rightarrow M^n$, überdecken スル 変換 φ ト スレバ
 $\mu^m(M^n)$ ヲ 與ヘル 連続変換 g ハ $\mu^m(\tilde{M}^n)$ ヲ 與ヘル
連続変換 $f = \varphi \circ f$ 加ヘタエ / デアル。即チ

$$f: S^m \longrightarrow \tilde{M}^n$$

$$g: S^m \xrightarrow{f} \tilde{M}^n \xrightarrow{\varphi} M^n$$

$g = \varphi \circ f$ 7 $f \xrightarrow{\varphi} g$ トシテ $\mu^m(\tilde{M}^n)$, $\mu^m(M^n)$
ハ isomorph , Zuordnung ヲ 表ハセル。 $\tilde{M}^n$, M^n
ノ 一点 q 7 Spur トシテ p 個 , 原像ヲ 持ツトスル。

lemma 1 デ $\mu^m(\tilde{M}^n) \xrightarrow{\tilde{k}} \pi^m(S^n)$,

isomorph in

$$\mu^m(\tilde{M}^n) \xrightarrow{\varphi} \mu^m(M^n)$$

isomorph auf.

故ニ

$$\mu^m(M^n) \xrightarrow{\tilde{k} \circ \varphi^{-1}} \pi^m(S^n)$$

isomorph in.

$\tilde{k} \circ \varphi^{-1}$ ナル 對應ヲ 幾何學的ニ 考ヘル。

$$\alpha \in \mu^m(\tilde{M}^n), \quad \tilde{k}(\alpha) \in \pi^m(S^n)$$

$$\varphi(\alpha) = \beta \in \mu^m(M^n), \quad k(\beta) \in \pi^m(S^n)$$

α ト β ト isomorph , 對應デアルガ $\tilde{k}(\alpha)$ ト $k(\beta)$
ト , 關係ハ

$$k(\beta) = p \tilde{k}(\alpha).$$

$\mathbb{Z}^{n-1}$ ヲ 一点ニ 縮タル Operation デ $\tilde{k}$ ハ iso-

morph, k は homomorph. $k(u^m(M^n)) \rightarrow p\tilde{k}(M^n(\tilde{M}^n))$ デアル。

然シ代数的對應デハ

$$\varphi: u^m(\tilde{M}^n) \longleftrightarrow u^m(M^n)$$

isomorph auf k カラ $u^m(M^n)$ / Abbildungs-
klasse $k(u^m(\tilde{M}^n))$,

即チ Hypergrad デ Characterisieren 出来
ル。然シ $\tilde{M}^n$ フ持ッテ素数 $= M^n$ 知ケデハ $\rightarrow p\pi^m(S^n)$
デ homomorph デアル。特 $= m=n$ トラバ $p\pi^n(S^n)$
ハ $\pi^n(S^n)$ ノ部分群デアルガ同時 $= \pi^n(S^n)$ ト iso-
morph auf デアル。即チ $u^n(M^n)$ ハ $p\pi^n(S^n) = iso-$
morph in デアル。

定義 部分群 $k(u^m(M^n))$ フ $\pi^m(S^n, M^n)$
デ表ス。

$\pi^m(M^n)$ ハ原素ノ取り方ニ從ヒ, 換言スレバ M^n ,
開道 $w =$ 對シ Automorphismus γ_w フ受ケル。
(Eilenberg, 安倍亮)

補助定理3. $u^m(M^n)$ ハ開道 $w =$ 對シ Automor-
phismus γ_w ハ identisch $\neq$ / デアル。 $X^m(M^n)$
ノ記号 (安倍亮) デハ

$$w^{-1}\alpha w = \alpha, \quad \alpha \in u^m(M^n)$$

証明: $\alpha' = w^{-1}\alpha w$, $\alpha' \neq \alpha$ トシテ, α, α' フ
導ヘル Abbildung $S^m \rightarrow M^n$ フ f, f' トス。之レヲ
 $\tilde{M}^n$ ハノ変換ニ直セバ $g = \varphi^{-1}f$, $g' = \varphi^{-1}f'$.

$$\varphi^{-1}(\alpha) \neq \varphi^{-1}(\alpha').$$

茲デ isomorph h , 對應 $\tilde{h}$ ヲ行ヘバ $\tilde{h}\varphi^{-1}(\alpha)$
 $\neq \tilde{h}\varphi^{-1}(\alpha')$, 即チ $\pi^m(S^n)$ ノ異ナル元、然ルニ
 $\alpha' = w^{-1}\alpha w$ ナル假定カラ明ラカニ γ ノ hypergrad
 ハ等シイ。 $\tilde{h}\varphi^{-1}(\alpha) = \tilde{h}\varphi^{-1}(\alpha')$.

—— 以上 ——

補助定理 4. $\lambda^{m-1}(\mathbb{Z}^{n-1})^{3)}$ ハ $\pi^m(S^n) \rightarrow \pi^{1m}(S^n, M^n) = \text{homomorph in} = \text{abbilden}$ ナル。
 特ニ $m=n$ ナラバ homomorph auf $\mathbb{Z}^n$ ナル。

証明: $\alpha \in \lambda^{m-1}(\mathbb{Z}^{n-1})$ ヲ與ヘル連続変換 $f: S^{m-1} \rightarrow \mathbb{Z}^{n-1}$ トスル。 $E^m = S^{m-1}$ トスレバ f ハ E^m マデ M^n ヘ erweitern 出来ル。 $F: E^m \rightarrow M^n$ デ $\mathbb{Z}^{n-1}$ ヲ一点ニ Identifizieren スレバ $\pi^m(S^n)$ ノ或ル元 β ヲ與ヘル。

$$\alpha \rightarrow \beta$$

ハ mod. $\pi^{1m}(S^n)$ デ eindeutig デアル。

eindeutig デナイトスレバ E^m ヘノ他ノ Erweiterung F' デ $F': E^m \rightarrow M^n$ デ $\beta' (\neq \beta)$ ヲ與ヘル、ニツノ E^m ハ Rand デ Abbildung ハ $f =$ 等シイ。ニツ合セルト S^m ノ変換ト考ヘラル。從ツテ $\pi^{1m}(S^n)$ ノ或ル元 デアル。然ルニ $\beta - \beta'$ デアル。

3) 本誌第 189 号 = Mannigfaltigkeit ヘノ 連続変換 II.
 定理 此ハ一般ノ m デハ 出来ナイト思フ。

$$\therefore \beta - \beta' \equiv 0 \pmod{\pi'^m(S^n)}$$

對應 $\lambda^{n-1}(Z^{n-1}) \rightarrow \pi^m(S^n) - \pi'^m(S^n)$ は
homomorphism である。 auf カドゥカハ合ヲナ
イ。

$\lambda^{n-1}(Z^{n-1}) \rightarrow \pi^m(S^n) - \pi'^m(S^n)$ / homo-
morphes Bild 7 $\pi^m(S^n)$ / 中ノ代表元ヲ表ハシテ
 $h(\lambda^{n-1}(Z^{n-1}))$ トスル。 從ツテ $\alpha \in \lambda^{n-1}(Z^{n-1})$
= 上ノ操作ヲ對應スル元ハ $h(\alpha) + \pi'^m(S^n)$ 7
アル。

定義: $\alpha \in \lambda^{n-1}(Z^{n-1})$, $\beta \in \pi'^n(S^n)$ トシ凡
ル paar $(\alpha, h(\alpha) + \beta)$ ハ abel 群ヲ作ル。 $\forall \alpha, \beta$
トスル。 記号ヲ $\mathcal{O}_\gamma = (\lambda^{n-1}(Z^{n-1}), h(\lambda^{n-1}(Z^{n-1}))$
 $+ \pi'^n(S^n))$ ト表ス。

$$\begin{aligned} (\alpha, h(\alpha) + \beta) + (\alpha', h(\alpha') + \beta') \\ = (\alpha + \alpha', h(\alpha) + h(\alpha') + \beta + \beta'), \\ \text{茲} = h(\alpha + \alpha') = \beta'' \in \pi'^n(S^n) \text{ 7 } \beta \\ = (\alpha + \alpha', \beta'' + \beta' + \beta) \end{aligned}$$

Z^{n-1} が $(n-1)$ simple 7 $+1$ 7 ラベ $w = \text{対シ}$
7 $\lambda^{n-1}(Z^{n-1})$ ハ Automorphismus γ_w 7 受ケル。

$h(\lambda^{n-1}(Z^{n-1}))$ ハ $w = 1$ 7 閉シナ。 從ツテ 群 $\mathcal{O}_\gamma$ ハ
Automorphismus γ_w 7 受ケテ

$$\begin{aligned} \gamma_w(\alpha, h(\alpha) + \beta) &= (\gamma_w \alpha, h(\alpha) + \beta) \\ &= (\gamma_w \alpha, h(\gamma_w \alpha) + \beta) \end{aligned}$$

定義: Komplex K^n / 頂点 = 順序ヲ附ス。 各

点 = Identifizieren スルコトヲ修リ $h(\alpha) + \beta$ ヲ表ス. $\alpha = \beta \in \pi'^n(S^n)$. 従ッテ各 n -単体 $T_i^n =$ 對シ 0 ノ元 $(\alpha_i, h(\alpha_i) + \beta_i)$ ガ一意ニ定マル.

代数複体 $f^n: T_i^n \longrightarrow (\alpha_i, h(\alpha_i) + \beta_i)$

ハ 0 -Zyklus ナル. コノ f^n ハ Überdeckung U_f ニ対シ 0 ナル. ~ 0 ト假定スレバ次ノ複体 f^{n-1} ガ存在スル.

$$f^{n-1}: T_j^{n-1} \longrightarrow (\alpha_j, h(\alpha_j) + \beta_j)$$

$$g_0 f^{n-1} = f^n.$$

$T^n \times t$ ($0 \leq t \leq 1$) = 對シ Abbildung F ヲ次ノ如ク作ル.

$$F(T^n \times 0) \equiv f(T^n)$$

$$F(T_k^{n-2} \times t) \equiv f(T_k^{n-2}), \quad t = \text{independent.}$$

$F(T_j^{n-1} \times 1)$. T_j^{n-1} ノ最始ノ頂点 p_j ニ關シテ, $T_j^{n-1} \times 0 - T_j^{n-1} \times 1$ ノ変換ハ $\lambda^{n-1}(\mathbb{Z}^{n-1})$ ノ α_j ヲ與ヘル $\gamma_j = 1$ ナル.

$F(T_j^{n-1} \times t)$ 上ノ作り方カラ此ノ境界 $T_j^{n-1} \times 0 + \sum_k T_k^{n-2} \times t - T_j^{n-1} \times 1$ ノ変換ハ α_j , 従ッテソノ n 次元ノ Vollkugelノ変換トシテ $h(\alpha_j) + \beta_j$ ヲ與ヘル様ニナル.

$F(T^n \times 1)$ 此ノ境界ハ $\sum_j T_j^{n-1} \times 1$. 此ノ変換ハ上ニ與ヘタガ最始ノ頂点 p ニ關スル $\lambda^{n-1}(\mathbb{Z}^{n-1})$ ノ元ハ 0 ナル. $g_0 f^{n-1} - f^n = 0$ ナル假定カラ

$$\sum_j \gamma_j \alpha_j - \alpha = 0, \quad \text{茲ニ } \gamma_j \text{ハ線分 } p p_j \text{ガ } f \text{ニヨリ}$$

M^n , $weg = 移り$, $\forall$, $weg = \exists \text{ル } \lambda^{n-1}(\mathbb{Z}^{n-1})$, Automorphismus デアル。従ッテ $F(T^n \times 1) \subset \mathbb{Z}^{n-1} =$ 作
ルコトヲ得。

$F(T^n \times t)$ $(T^n \times t)' = T^n \times 0 + \sum_j T_j^{n-1} \times t$
 $- T^n \times 1$. 境界 $= \wedge$ 既 $= F$ ヲ與ヘタ。 $\pi^n(M^n)$, 或ル
 元ヲ表ハス。

補助定理 1, 2 = ヨリ $\pi'^n(S^n)$, 元ヲ一意ニ表ハス。
 然ル $= g_0 f^{n-1} - f^n = 0$ カラ $\forall$, 元ハ

$$T^n \times 0 \rightarrow h(\alpha) + \beta,$$

$$T_j^{n-1} \times t \rightarrow h(\alpha_j) + \beta_j,$$

$$T^n \times 1 \rightarrow 0$$

即チ 0 元 補助定理 2 = ヨリ, 従ッテ $\mu^n(M^n)$, 0 元
 デアル。従ッテ $F(T^n \times t) \wedge \pi^n(M^n)$, 元ノウチ
 wesentlich n デ + 1 元ヲ表ス。故 $= F(T^n \times 1)$ / 変
 換ヲ $\mathbb{Z}^{n-1}$ 内デ適當ニトレバ $\pi^n(M^n)$, 0 元 = トレル。
 従ッテ $F(T^n \times t) = \text{erweitern}$ 出来ル。

以上 = ヨリ $f^n \sim 0$ + ラバ $f(T^n) \wedge F(T^n \times 1) \subset \mathbb{R}^{n-1}$
 $= \text{homotop.}$ 即チ $f(K^n)$ $\wedge$ wesentlich auf $\mathbb{R}^n$
 + 1. — 以上 —

定理 2. $f(K^{n-1}) \subset \mathbb{Z}^{n-1}$, $f(\dot{T}^n) \rightarrow \alpha \in \lambda^{n-1}$
 $(\mathbb{Z}^{n-1})$ + ルトキ $U_f = \text{關シ } T^n \rightarrow (\alpha, h(\alpha) + \beta)$
 + ル n 次元 Oberer Zyklus + 0 が存在スル + ラバ
 f $\wedge$ $K^n \rightarrow \mathbb{R}^n = \text{erweitern}$ + レテ $\forall$ $\wedge$ wesentlich
 auf $\mathbb{R}^n$ 7 7 7 。

証明: f が K^n 迄 erweitern 出来且 T^n ,
内部ハ $\pi^n(S^n)$, $h(\alpha) + \beta$ + n 元ヲ表ハスヤウ = 出
來ルコトハ明カ. 今コレが *wesentlich auf $\mathbb{Z}^n$ + イト*
スルヲバ $K^n \times t$ ($0 \leq t \leq 1$) / *Abbildung* F_t が
存在シ

$F_1(K^n \times 1) \subset \mathbb{Z}^{n-1}$, $F_0(K^n \times 0) \equiv f(K^n)$
ト出來ル. $F(p \times t) \cap \mathbb{Z}^{n-1}$ / 閉道 w_p . $F(T_j^{n-1} \times t)^*$
ハ $\lambda^{n-1}(\mathbb{Z}^{n-1})$ ハ元 α_j ヲ表ハス.

但シ基準点ハ $p_j \times 0 =$ トル. $p \times 0$ ヲ基準 = シタ
 $(T^n \times 0)^* + \sum_j (T_j^{n-1} \times t)^*$ / $F =$ ヨル $\lambda^{n-1}(\mathbb{Z}^{n-1})$ / 元
ハ $\alpha + \sum_j \gamma_j \alpha_j$.

-之レヲ $p \times 1$ / 基準 = 移セバ $F(p \times t) = w_p$ トス
レバ

$$\gamma_p(\alpha + \sum_j \gamma_j \alpha_j) \in \lambda^{n-1}(\mathbb{Z}^{n-1}).$$

是レハ $F(T^n \times 1)^*$ / 表ス元. $F(T^n) \subset \mathbb{Z}^{n-1}$ デア
ルカラ

$$\gamma_p(\alpha + \sum_j \gamma_j \alpha_j) = 0$$

$$\text{即チ } \alpha = - \sum_j \gamma_j \alpha_j$$

又 $F(T^n)$, $F(T_j^{n-1} \times t)$ ($F(T^n \times 1) =$ ヨル
 $\pi^n(S^n)$ / 元ハ夫々 $h(\alpha) + \beta$, $h(\alpha_j) + \beta_j = h(\gamma_j \alpha_j)$

$+ \beta_j, 0 \text{ デアツテ}$

$$F(T^n \times t)' \rightarrow h(\alpha) + \beta + \sum_j h(\alpha_j) + \beta_j$$

$$= 0 \in \pi^n(S^n).$$

$$\text{故} = h(\alpha) + \beta = - \sum_j h(\alpha_j) + \beta_j$$

故 = $(n-1)$ 次元代数複体

$$f^{n+1} : -T_j^{n+1} \rightarrow (\alpha_j, h(\alpha_j) + \beta_j)$$

$$\text{ヲトレバ } g \circ f^{n+1} = f^n.$$

— 以上 —

定理 3. Mannigfaltigkeit M^n が Mannigfaltigkeit $M^n = \text{wesentlich auf} = \text{Abbildungen auf } M^{n-1}$ が $Z^{n-1} = \text{移ル + ラバ } M^n = \text{普通, } 0\text{-Zyklus } Z^n \neq 0 \text{ が存在スル.}^{5)}$

次 = $K^{m-1} \rightarrow Z^{n-1} = \text{移ル Abbildung } f \text{ ヲ } K^m \text{ マデ } M^n = \text{二通り} = \text{erweitern スルトキ, } \text{ニツノ Abbildung } F_1, F_2 \text{ が homotop + ルタメノ条件ハ何カ。必要条件ハ中々難カシイ。充分条件トシテハ } T^m \text{ ノ境界デハ } F_1, F_2 \text{ 一致スルカラ ニツ合セテ } \text{一ツデハ } F_1, \text{ 他方デハ } F_2 \text{ トシタトキ } S^m \rightarrow M^n \text{ ト考ヘラレ } \pi^m(M^n) \text{ ノ元ヲ表ス。之レヲ } K^m \text{ ノ各 } T^m \text{ ニツキ行ヒソノ元ヲ對應サセルト } Z_m^m \text{ デアル。}$

5) 本誌第 190 号. überdeckung / Homologiegruppe
定理 2.

定理 4 $Z_0^m \sim 0$ ならば F_1 と F_2 と homotop

である。

証明略。