OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	Vitali-Hahn-Saks ノ定理ニ関聯シテ
Author(s)	國澤, 清典
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 191, p. 630-639
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74760
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

829. Vitali-Hahn-Saks ノ定理ニ関聯シテ

國澤　清典（阪大）

T ヲ任意ノ抽象空間トシξヲTヲ含ムヤウナTノ部分集合カラ出来ル Boree family トスル。$\alpha(E)$ハξデ nonnegative + completely additive + 集合函数デ $\alpha(T)<\infty$ トスル。$F(x)$ハξデ有限数値集合函数デ completely additive デ且ツ absolutely continuous トスル。

ξニ属スニツノ元素ヲ E_1, E_2 トスルト $\alpha(E_1-E_1E_2)+\alpha(E_2-E_1E_2)=d(E_1,E_2)$ デ距離ヲ定義スルトキハ完備距離空間ニナルコトハ良ク知ラレテヰル。コノトキ上ノ$F(x)$ハ此ノ完備距離空間ξデノ continuous functional ト考ヘルコトガ出来ル。

次ニ述ベル定理ハ特殊ナ形デ先ヅ Hahn ニヨリ証明サレ、ツヅイテ Saks ニ依リ次ノヤウナ一般ナ形ノ下デ証

明サレタ[1]モノデ通常 Vitali-Hahn-Saks (又ハ Hahn-Saks) ノ定理ト呼バレテイル。

定理 $\{F_n(x)\}$ ヲ completely additive デ absolutely continuous ナ集合函数ノ系列トスル。$\{F_n(x)\}$ ガ距離空間 $\mathfrak{S}$ デノ第二類ノ集合 H ニ属スル元素ニツイテ収斂スルナラバ $F_n(x)$ ハ equi-absolutely continuous ナル。

此ノ重要ナ定理ガ普通ノ書物ニハ載ツテヲラナイ様ガカラ先ヅ証明ヲ紹介シテヲキマス。

証明 $\{F_n(x)\}$ ガ H デ0ニ収斂スルト考ヘテ良イ。[2] 然ル時 $\varepsilon>0$ ヲ如何ニ與ヘテモ

$$|F_n(x)| \leqq \frac{\varepsilon}{2}$$

ガスベテノ $X \in K_0$ ト $n \geqq n_0$ ニ對シテ成立スルヤウナ n_0 ト半徑 r ノ $\mathfrak{S}$ デ球 K_0 ガ存在スル。何トナラバ $m \geqq n$ ナルスベテノ m ニ對シ $|F_m(x)| \leqq \frac{\varepsilon}{2}$ ナルヤウナ $X \in \mathfrak{S}$ ノ集合ヲ H_m トオケバ

$$H \subset \sum_n H_n$$

ガ云ヘテ H ハ第二類ノ集合デアルカラ H_{n_0} ガ又第二類ノ集合

---

1) S. Saks: Addition to the note on some functionals. T.A.M.S. Vol 35. (1933)

2) 若シ然ウデナケレバ $\{F_n(x)-F_m(x)\}$ ナル系列ヲ考ヘルコトニヨッテ

デルヌシナルo が存在スル。他方 $F_n(X)$ ハ初メ = 述ベタ距離ノ意味デ連続ナル故スベテノ H_n ハ開集合デアル。一故= H_{n_0} ハ半径 γ ノ球 $K_0 = K_0(X_0;\gamma)$ ヲ含ミ K_0 デハルトルo = 対シ $|F_n(X)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ デアル。然ル = 空間 S ノ元素 = シテ $\alpha(E,0) = \alpha(E) \leq \gamma$ + ル任意ノ E = 對シ次ノ様ナS ノ元素 E_1, E_2 ガ存在スル。

$$E_1 = E_2 + E, \quad E_1 \in K_0, \quad E_2 \in K_0$$

之レヲ使ヘバ $n \geq n_0$ = 對シ

$$|F_n(E)| \leq |F_n(E_1)| + |F_n(E_2)| \leq \varepsilon$$

之レヨリ F_n ノ equi-absolutely continuous ハ容易 = 云ヘル。

—— 以 上 ——

此レト類似ナ方法デ次ノ定理[3]ヲ証明スルコトガ出来ル。

定理 $\{F_n(X)\}$ ヲ complete additive absolutely continuous set function ノ系列トシS ノスベテノ X = ツイテ

$$\overline{\lim_n} |F_n(X)| < \infty$$

ガ成立スレバS ノスベテノ X = ツイテ一様 =

$$|F_n(X)| < M \qquad n = 1, 2, \cdots\cdots$$

ガ成立スル様ナM ガ存在スル。

此ノ定理ヲ以下 Saks ノ定理ト呼ブコト = スル。

---

3) S. Saks: loc. cit.

以上ノ Vitali-Hahn-Saks ノ定理及ビ Saks ノ定理ヲ應用シテ二三ノ定理ヲ証明シタイ。

先ヅ近着ノ Bulletin American M.S. = Pettis ガ次ノ定理ヲ豫告シテイル。[4] コノ簡單ナ証明ガ得ラレタノデ先ヅ之ヲ述ベテ見タイ。

定理1 任意ノ空間 T ニ於テモヲ T ヲモ元素ニ含ムヤウナ T ノ部分集合ノ Borel family トスル。$\mu(E)$ ハモノノ nonnegative ナ completely additive set function デ $T=\sum_{i=1}^{\infty} T_i$ $(\mu(T_i)<\infty)$[5] トスル。$\chi(E)$ ハモニ於テ定義サレ Banach 空間 X ノ値ヲトル函數トシ，且ツ次ノ條件ヲ滿足スルトスル。各 $f\in\overline{X}$ (X ノ conjugate space ヲ示ス) ニ對シ數値集合函數 $f(\chi(E))$ が completely additive デ $\mu(E)=0$ ナラバ $f(\chi(E))=0$ トスル。

然ラバ $\chi(E)$ ハ completely additive デ且ツ如何ナル $\varepsilon>0$ ニ對シテモ $\mu(E)<\delta$ ナラバ $\|\chi(E)\|<\varepsilon$ ナル樣ナ δ が存在スル。

証明 $\chi(E)$ ノ completely additive ナルコトハ $\varphi(\chi(E))$ $(\varphi\in\overline{X})$ が completely additive ナルコトヨリ $\{E_i\}$ ヲ互ニ素ナモノノ元素ノ系列トスルト $\{\chi(E_i)\}$ ハ unconditionally convergent デ

---

4) B.A.M.S. vol. 45－9 (1939), P.677.

5) 此ノ假定ハ次ノ証明デワカル樣ニ不要ノ樣ニ思ヘル.

$\sum \chi(E_i) = \chi(\sum E_i)$ トナル。[6]

次ニ $\chi(E)$ ノ absolutely continous ナルコトヲ証明スル。今假リニ $X(E)$ が absolutely continous デナイト假定スルト或 $\varepsilon_0 > 0$ ガ存在シテ $meas(E_\nu) \to 0$ ナル $\{E_\nu\}$ が存在シテ

$$\|\chi(E_\nu)\| \geq \varepsilon_0 \qquad \nu = 1, 2, \cdots\cdots.$$

此ノ $\{E_\nu\}$ ハ互ニ素ト考ヘテ良イ。又 $meas(\sum E_\nu) = \sum meas(E_\nu) < \infty$ ト考ヘテ差支ヘナイ。此ノ E_ν 全体ヲ一ツノ空間ト考ヘテ此ノ総テノ E_ν ヲ含ムヤウナ最小ノ Borel family ハ $\sum E_{\nu_i}$ ヲ元素トスルコトハ明ラカデアル。此処ニ $\{\nu_i\}$ ハ有限又ハ可附番無限個ノ任意ノ $\{\nu\}$ ノ部分系列デアル。

此ノ Borel family ヲ Z デ表ハスコトニスル。次ニ Z ヲ E_ν ニ對シ $\chi(E_\nu)$ ノ張ル linear closed manifold ヲ考ヘルト此レハ separable[7] トナル。此ノ manifold ヲ Y トスル。

依ツテ $\lim_n \sup |\varphi_n \chi(E)| = \|\chi(E)\|$ ($E \in Z$) ガ成立スルヤウナ $\overline{X}$ ノ元素ノ系列 $\{\varphi_n\}$ ($\|\varphi_n\| \leqq 1$) ガ存在スル。次ニ $\varepsilon > 0$ ヲ任意ニ與ヘ δ ヲ適當ニ取リ

---

6) B. J. Pettis: Integration in vector spaces, Tr. A. M. S. 42 (1938) P. 277–304, Theorem 2.32.

(7) 以上ノ technique ヲ角谷サンニ教ヘテ頂キマシタ。

$meas(S)<\delta.(S\in Z)$ ニツイテ $|\varphi_i x(S)|<\varepsilon$ ($\|\varphi_i\|\leqq 1$) ガ φ_i ニ関シテ uniformly ニ成立スルコトヲ示ス。

今此レガ成立シナイトスルト $\{\varphi_{\nu_i}\}$ ($\|\varphi_{\nu_i}\|\leqq 1$) ナル subsequence ト $(S_{\nu_i})\to 0$ ナル $\{S_{\nu_i}\}$ ガ存在シテスベテノ ν_i ニツイテ

$$|\varphi_{\nu_i} x(S_{\nu_i})|\geq\varepsilon \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (A)$$

トナル。

然ルニ Y ハ separable ナル故ニ $\{\varphi_{\nu_i}\}$ ノ部分系列 $\{\varphi'_{\nu_i}\}$ ガ存在シテ任意ノ $Z\ni E$ ニツイテ $\varphi'_{\nu_i} x(E)$ が $\nu_i\to\infty$ ナルトキ収斂スル。[8] 故ニ vitali-Hahn-Saks ノ定理ヨリ $\varphi'_{\nu_i} x(E)$ ハ equi-absolutely continuous トナリ (A) ト矛盾スル。故ニ $\varepsilon>0$ ヲ任意ニ取ルモ δ ヲ適當ニ取リ $meas(S)<\delta$ ($S\in Z$) ナラバ

$$\|x(S)\|<\varepsilon$$

トナル最初ノ假定ト矛盾スルコトトナル。依ッテ $\varepsilon>0$ ヲ任意ニ與ヘルモ $meas(E)<\delta$ ($E\in\xi$) ナラバ

$$\|x(E)\|<\varepsilon$$

ナル様ナ δ が存在スル。 ——以上——

コウシテミルト $T=\sum T_i$ ($\alpha(T_i)<+\infty$) ナル條件ハ不要ノ様ニ思ハレル。

---

8) S. Banach: Théorie des opérations linéaires P. 123.

次= S. Banach ノ opérations linéaires ノ本ニ載ッテイル L ノ weakly complete ナルコト ノ証明[9]ハ Lebesgue ノ定理ヲ使ッテイルガ Lebesgue ノ定理ヨリ Vitali-Hahn-Saks ノ定理ヲ使フ方ガワカリヨイ。即チ $\overline{L}=M$ ヨ f ニ対シ $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ $(x_n \in L)$ ガ存在スル故ニ Banach ノ定理[10]ヨリ $\int_0^1 |x_n(t)|\,dt < C$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ ナル常数 C ガ存在スル。

_ 次ニ假定ヨリ $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 x_n(t)\,\alpha(t)\,dt$ $(\alpha(t)\in M)$ ノ存在スルコトカラ特ニ任意ノ可測集合 E ニツイテ $\lim_{n\to\infty} \int_E x_n\,dt$ ガ存在スル。ヨッテ Vitali-Hahn-Saks ノ定理ヨリ $F_n(E)=\int_E x_n(t)\,dt$ ハ equi absolutely continuous デアルカラ此ノ limit function $\lim_{n\to\infty} F_n(E)=F(E)$ モ亦 absolutely continuous デ completely additive トナリ

$$F(S)=\int_S F'(t)\,dt$$

トナル。コレヨリ $\{x_n(t)\}$ ハ $F'(t)$ ニ weakly convergスルコトガワカル。[11]

最後ニ Bochner-Taylor ノ $L(X)$ ノ weakly

---

9) S. Banach: loc. cit. P. 141-142.

10) S. Banach: loc. cit P. 80.

11) S. Banach: loc. cit P. 136

complete ノ証明[12] = 於テモ Vitali-Hahn-Saks ノ定理ヲ使フト証明が直接トナリ、分リ易クナル。$L(X)$ トハ Bochner ノ意味デ可測デ各 t ニツキソノ値が Banach space X = 属シ且ツ $\int_0^1 \|f(t)\|\,dt < \infty$ ナル函数 $f(t)$ ノ作ル space デ若シ $\|f\| = \int_0^1 \|f(t)\|\,dt$ デ f ノ norm ヲ定義スレバ $L(x)$ ハ Banach space トナル。又 $L(X)$ デ定義サレタ linear functional U ハ次ノ様ニ表ハサル。

$$U(t) = \int_0^1 \varphi(t) f(t)\,dt$$

此処ニ $\|U\| = \underset{0\le t\le 1}{\text{ess. sup}} \|\varphi(t)\|$ ニシテ $\varphi(t)$ ハ Bochner ノ意味デ可測デソノ値が $\overline{X}$ ニ属シ $\underset{0\le t\le 1}{\text{ess. sup}} |\varphi(t)|$ デ norm ヲ定義スルト此ノ空間ハ Banach space トナル、此レヲ $M(\overline{X})$ ト書ク。$\{f_n\}$ ヲ $L(x)$ ノ elements ノ系列トシ $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \varphi(t) f_n(t)\,dt$ が如何ナル $\varphi(t) \in M(\overline{X})$ ニ対シテモ存在スルモノト假定スル。コノ特殊ノ case トシテ如何ナル $\varphi \in \overline{X}$ ト任意ノ可測集合 E ニツイテ

$$\lim_{n\to\infty} \int_E \varphi f_n(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \varphi \int_E f_n(t)\,dt$$

---

12) Bochner-Taylor: linear functionals on certain spaces of abstractly-valued functions, Ann. Math. 39—4 (1938) P. 913—944 Theorie 5.2.

が云へル。依リテ Vitali-Hahn Saks ノ定理ヨリ

$$\varphi F_n(E) = \varphi \int_E f_n(t)\,dt = \int_E \varphi f_n(t)\,dt$$

$$n = 1, 2, \cdots\cdots$$

ハ φ ヲ固定シテ equi-absolutely continuous デアル。X ガ weakly complete ナル式ハ

$$\lim_{n\to\infty} \int_E \varphi f_n(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \varphi \int_E f_n(t)\,dt = \varphi F(E)$$

ナル limit function $F(E)$ が存在シテ各集合 E = ツキソノ値ガ X = 属ス集合函数デアリ、且ツ $\varphi F(E)$ ハ completely additive デ且ツ absolutely continuous デアルカラ定理ノヨリ $F(E)$ ハ completely additive デ absolutely continuous デアル。更ニ X ガ locally weakly compact ナラバ Pettis ノ微分ノ定理[13]ヨリ $F(E)$ ハ微分可能デ absolutely continuous ナレコトヨリ

$$F(E) = \int_E F'(t)\,dt \qquad (F'(t) \in L(X))$$

ガ成立シ結局

$$\int_E \varphi f_n(t)\,dt \longrightarrow \int_E \varphi F'(t)\,dt$$

---

13) Pettis: Differentiation in Banach spaces, Duke Math. 5-2 P. 254 – 268.

マタ弱収斂ト云フコトカラ，Banach ノ定理ニヨリ

$$\| f_n \| = \int_0^1 \| f_n(t) \| \, dt < M \quad (M \text{ ハ常数})$$

$$n = 1, 2, \cdots\cdots$$

然シテ step function ハ $M(\overline{X})$ デ everywhere dense ナル故ニ近似スルコトガ出来テ 任意ノ $\varphi(t) \in M(\overline{X})$ ニツキ

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \varphi(t) f_n(t) \, dt = \int_0^1 \varphi(t) F'(t) \, dt$$

ガ成立スル．依ツテ

定理 2　X ガ locally weakly compact ナ Banach space ナルトキ $L(X)$ ハ weakly complete デアル。[14]

---

14) Bochner - Taylor ハ X ガ regular デ X, $\overline{X}$ ガ condition D ヲ満足スルト云フ假定デ $L(X)$ ノ weakly complete ヲ証明シテイル。