830. Markoff Process with Stationary Distribution, II

吉田　耕作（阪大）

Ω ヲ任意ノ空間トシ，Ω ノ部分集合ノ作ルーツノ Borel Körper $B(\Omega)$ ヲ考ヘル（$\Omega \in B(\Omega)$ トシテヲク）。今 simple Markoff Process ニヨツテ Ω ノ点ガ確率的ナ遷移運動ヲ行ツテヲルモノトスル。コノ Process ニヨリ，点 $x \in \Omega$ ガ単位時間ノ後ニ $E \in B(\Omega)$ ニ移ル確率ヲ $P(x, E)$ トスルト

$$P(x, E) \geqq 0 \quad \text{且ツ} \quad P(x, \Omega) \equiv 1$$

analysis ヲ推シ進メルタメニ，$P(x, E)$ ハ x ヲ fix シタトキ $E \in B(\Omega)$ ニ関シ completely additive，又 E ヲ fix シタトキ $x \in \Omega$ ニ関シテ measurable[1) トスル。然ラバ，x ガ n 単位時間後ニ E ニ移ル確率 $P^{(n)}(x, E)$ ハ順次

$$P^{(n)}(x, E) = \int_{\Omega} P^{(n-1)}(x, dy) P(y, E)$$

$$\left(P^{(1)}(x, E) = P(x, E) \right),$$

ニヨツテ定義サレル。

前談話[2)] ノ所論ヲ一般化シテ，次ノ假定ノモトニ $P^{(n)}(x, E)$ ノ $n \to \infty$ ナル場合ノ asymptotic

---

1) 任意ノ $\alpha < \beta$ ニ対シ $\underset{x}{E}\{\alpha \leqq P(x, E) < \beta\} \in B(\Omega)$ トナルコト。

2)

behaviour ヲ調ベル，即チ

non-negative 且ツ $E \in B(\Omega)$ ニ關シ completely additive ナ set function $\varphi(E)$ ガ存在シ (1) $\varphi(\Omega)=1$ (2) $\int_{\Omega}\varphi(dx)P(x,E)=\varphi(E)$ (3) $\left\{\begin{array}{l}\text{距離 } d(E_1, E_2)=\varphi(E_1+E_2-E_1\cdot E_2) \text{ ノ} \\ \text{意味デ } B(\Omega) \text{ ガ separable}^{1)}\end{array}\right.$

コノトキ次ノ mean ergodic theorem ガ成リ立ツ。measurable 且ツ $\int_{\Omega}|f(x)|\varphi(dx)<+\infty$ ナル点函數 $f(x)$ 全体ノ作ル Banach space (norm $\|f\|=\int_{\Omega}|f(x)|\varphi(dx)$) ヲ $L(\varphi)$ ト書クト

$\boxed{\text{定 理}}$　任意ノ $f\in L(\varphi)$ ニ對シ ($n=1,2,\cdots\cdots$ 又 $E\in B(\Omega)$)

i) $f^{(n)}(x)=\int_{\Omega}P^{(n)}(x,dy)f(y)\in L(\varphi)$

---

1) 此ノ假定ハ φ ガ普通ノ Euclid 空間ノ Lebesgue 測度ナル場合ニハ滿足サレテル。又コノ距離ノ意味デ $B(\Omega)$ ガ complete ニナルコトハヨク知ラレテヲル。

i) $\int_{\Omega} f(x)\varphi(dx)P^{(n)}(x, E) = \int_{E} f^{(-n)}(y)\varphi(dy)$,

$$f^{(-n)} \in L(\varphi)$$

ii) $f^{*} \in L(\varphi)$ 及ビ $f^{-*} \in L(\varphi)$ ガ定ッテ

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega}\left| f^{*}(x) - \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} f^{(m)}(x)\right| \varphi(dx) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega}\left| f^{-*}(x) - \frac{1}{n}\sum_{m=-1}^{-n} f^{(-m)}(x)\right| \varphi(dx) = 0$$

$\boxed{\text{注意}}$ 我々ノ Markoff Process (with stationary distribution φ) ハ相當一般デアリマス。即チ steady flow (deterministic transition process) ノ場合ヲモ含ムカラデアリマス。ソレニハ Ω ノ Ω ヘノ one-to-one 且ツ measure-preserving ナ変換[1] T ヲ考ヘテミマス。コノトキ $E \in B(\Omega)$ ノ characteristic function $C_E(x)$ ヲ考ヘ

$$C_E(T\cdot x) = P(x, E)$$

ト置クトコノ P ハ M.P. with S.D. φ ヲ定義スルコトハ直チニワカリマス。又 $f \in L(\varphi)$ ニ對シ

$$f^{(n)}(x) = f(T^{n}\cdot x),\quad f^{(-n)}(x) = f(T^{-n}\cdot x)$$

トナルコトモワカリマス。ヨッテ上ノ $\boxed{\text{定理}}$ ハ deterministic

---

1) $B(\Omega)$ ノ集合 E ヲ同ジク $B(\Omega)$ ノ集合 $T\cdot E$ ニ移シ且ツ $\varphi(E) = \varphi(T\cdot E)$ トナルコト.

及ビ indeterministic case ニ對シ同時ニ M.E.T. ヲ與ヘル譯デ、従来 vollstetig ナ Markoff Process 許リ取リ扱ッテヲッタノニ對シテ進歩シタ訳デアリマセウ。所ガ角谷君ニ之ヲオ話シタ所次ノ様ナ essential ナ注意ヲ受ケマシタ。

同君ニヨレバ J. L. Doob ノ論法[1]ヲ modify スレバ f ガ有界函数ノ場合ハ定理ニ於ケル平均収斂ガ measure φ ニ關シテノ almost everywhere ノ収斂デ置キ換ヘ得ルノデアリマス。[2] コノ方ガ結果ガ宜シイ!! ト云フノハ a.e. 収斂カラ平均収斂[2]ハ出ルケレドモ逆ハ一般ニ然ラズダカラデアリマス。Doob ノ論法ト云フノハ無限次元積空間ヲ考ヘコンデ Birkhoff ノ ergodic theorem ヲ使ハウト云フノデアリマス。但シ Doob ガ果シテ角谷君ガ今度考ヘラレタ程度ニ意識的ニ考ヘタカドウカハ疑問ノヤウニ思ハレマス。ト云フノハ Doob ハ上ノ定理ニ於テ f ガ可測集合 $E(\in B(\Omega))$ ノ characteristic function ノ場合シカ云ッテヲリマセンシ、又 Markoff Process ヘノ具体的ナ應用例ニ於テハ極メテ特殊ナ場合シカ取扱ッテヲリマセン。

---

1) J. L. Doob: Stochastic processes with an integral-valued parameter, Trans. Amer. Math. Soc. 44 (1938), pp. 87–150.

2) 次ノ角谷君ノ談話参照

實ハ筆者ハ Doob ノ論文ヲ良ク讀マズニ、ーコノ應用例ノミヲ眺メテヲッタ次第デ不勉强ダッタ譯デシタ。

積空間ニ measure ヲ入レ B.E.T. ヲ使フト云フノニハ相當面倒ナ議論ヲセネバナリマセンシ、又以下ニ述ベル方法ハ方法トシテ拙ラナクハナイ様ニモ思ハレマスノデ定理ノ証明ヲ記錄シトキマス。

定理ノ証明

i) $\|f\|_M = \sup_{x\in\Omega} |f(x)|$ ナル場合ヲ考ヘルト明カニ $\|f\|_M \geqq \|f\|$。コノトキハ $f^{(n)}(x) = \int P^{(n)}(x, dy)\, f(y)$ ハ確カニ定義デキテ $\|f^{(n)}\|_M \leqq \|f\|_M$. 又

$$\int_\Omega |f^{(n)}(x)|\, \varphi(dx) \leqq \int_\Omega \varphi(dx) \int_\Omega P^{(n)}(x, dy)\, |f(y)|$$

$$= \int_\Omega |f(y)|\, \varphi(dy) \quad \left(\int_\Omega \varphi(dx)\, P^{(n)}(x, E) = \varphi(E) \text{ ニヨル} \right),$$

ニヨッテ $\|f^{(n)}\| \leqq \|f\|$ 即チ $f \to f^{(n)}$ ナル linear operation ハ有界ナ可測函數ヲ有界ナ可測函數ニ寫シ norm $\|\ \|_M$ ヲモ norm $\|\ \|$ ヲモ高メナイ。コノ事實カラ $f \in L(\varphi)$ ノ場合ノ i) ガ証明デキル。即チ f non-negative トシ $f_n(x) = \mathrm{Min.}(n, f(x))$ トヲクト $f_n(x)$ ハ有界ダカラ

$$f_n^{(m)}(x) \leqq f_{n+1}^{(m)}(x) \quad \text{且ツ} \quad \|f_n^{(m)}\| \leqq \|f_n\| \leqq \|f\|.$$

故ニ殆ド全テノ x (measure φ ニ關シテノ a.e. ノコト)

ニ對シテ，Faton ノ定理ヲ用ヒ

$$\lim_{n\to\infty} f_n^{(m)}(x) = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathfrak{S}} P^{(m)}(x, dy) f_n(y)$$

$$= \int_{\mathfrak{S}} P^{(m)}(x, dy)\left\{\lim_{n\to\infty} f_n(y)\right\} = \int_{\mathfrak{S}} P^{(m)}(x, dy) f(y)$$

ガ成リ立ツ。故ニ $\| f_n^{(m)} \| \leqq \| f \|$ ヲ用ヒ $f^{(m)}$ ノ存在ト共ニ

$$\| f^{(m)} \| \leqq \| f \|$$

ガ云ヘタコトニナル，故ニ $f \longrightarrow f^{(n)}$ ハ $L(\varphi)$ ノ $L(\varphi)$ 内ヘ線型寫像 P^n ヲ定メ且ツ P^n ノ norm 1 ナルコトガ容易ニワカル。上ニ述ベタ如ク P^n ハ $L(\varphi)$ ノ中ノ有界函數ノ norm $\| \quad \|_M$ ヲ高メナイ。

—— 以 上 ——

i). $E \in B(\mathfrak{S})$ ニ對シテ completely additive ナ set function $\Phi(E)$ ニ對シ norm ヲ $\|\Phi\|_V$ = Total Variation of Φ ニヨッテ定義スルト Banach 空間 $\mathfrak{M}$ ガ定義サレル。

$$\int_E \Phi(dx) P^{(n)}(x, E) = \Phi^{(-n)}(E)$$

ニヨッテ $\mathfrak{M}$ ノ $\mathfrak{M}$ 内ヘノ線型寫像（norm $\leqq 1$ —— 實ハ $= 1$）$\overline{P}^n$ ガ定義サレルコトハ明ラカデアル。所ガ

$$\Phi(E) = \int_E f(x)\varphi(dx) \qquad f \in L(\varphi)$$

ナル場合ニハ $\Phi^{(-n)}$ ハ實ハ measure φ ニ關シテ absolutely continuous ニナル。何者、$f(x)$ ガ有界函數ノトキハ

$$\left|\Phi^{(-n)}(E)\right| \leqq \int_{\Omega} \|f\|_M \varphi(dx) P(x, E) = \|f\|_M \varphi(E)$$

カラ明カ。所ガ f non-negative 且 $f \in L(\varphi)$ ノトキハ $f_n(x) = \mathrm{Min.}\,(n, f(x))$ トヲイテ

$$\int_{\Omega} \Phi(dx) P^{(n)}(x, E) = \lim_{m \to \infty} \int_{\Omega} f_m(x) \varphi(dx) P^{(n)}(x, E)$$

所ガ右辺ハ $f_m(x)$ ノ有界函數ナルコトカラ，上述ニヨリ absolütely continuous ナモノノ limes. 故ニ Vitali-Hahn-Saks ノ定理[1] ニヨリ $\int_{\Omega} \Phi(dx) P^{(n)}(x, E)$ ハ又 absolutely continuous. 從ッテ Radon-Nikodym ノ定理ニヨリ

$$\int_{\Omega} \Phi(dx) P^{(n)}(x, E) = \int_E f^{(-n)}(y) \varphi(dy).$$

—— 以上 ——

ii) $L(\varphi)$ ノ中デ有界且ツ可測ナ函數ハ norm $\|\ \ \|$ ノ意味デ dense: 又 operator P^n ハ全テ norm 1, 從ッテ operator

$$\frac{P + \cdots\cdots + P^n}{n}$$

ハ全テ norm $\leqq 1$. 故ニ有界函數 $f\ (\in L(\varphi))$ ニ對シテ ii) ガ云ヘレバ充分デアル。ソコデ

fヲ有界函數トスルト

$$f_{(n)}=\frac{P+\cdots\cdots+P^n}{n}\cdot f$$

ハ $\|f_{(n)}\|_M \leqq \|f\|_M$ ヲ滿足スル。ソコデ集合函數列

$$F_{(n)}(E)=\int_E f_{(n)}(x)\,\varphi(dx)$$

ハ equi-absolutely continuous. 所ガ $B(\mathfrak{S})$ ハ metric $d(E_1, E_2)=\varphi(E_1+E_2-E_1\cdot E_2)$ ノ意味デ separable ト云フ假定ガアッタカラ，適當ニ部分列 $\{F_{(n')}(E)\}$ ヲトレバ全テノ $E\in B(\mathfrak{S})$ ニ對シテ

$$\lim_{n'\to\infty} F_{(n')}(E)=F^*(E).$$

ガ存在スル。再ビ Vitali-Hahn-Saks ノ定理ニヨリ F^* ハ absolutely continuous。ヨッテ Rodon-Nikodym ノ定理ニヨリ $F^*(E)=\int_E f^*(x)\varphi(dx)$, $f^*\in L(\varphi)$. コノ f^* ガ $\{f_{(n')}\}$ ノ weak ナ limit ニナッテルコトハ直チニワカル。ソコデ M.E.T. ニヨリ $\{f_{(n)}\}$ 自身ガ f^* ニ強收斂スル。

—— 以上 ——