



Title	Stationary distribution ヲモツ Markoff Processニツイテ I
Author(s)	角谷, 静夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 191, p. 648-655
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74762
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

831 Stationary distribution γ of Markoff process = ツイテ I

角 谷 静 夫 (阪大)

§ 1. Introduction

例 1 如ク空間 Ω = 於ケル simple, homogeneous
+ Markoff process が $P(t, E)$ ナル kernel
= ヲツテ興ヘラレタスル。 Ω = 於ケル completely
additive + 集合函数 $\varphi(E)$ が存在シテ $\int \varphi(dt) P(t, E)$
= $\varphi(E)$ トナルトキ Markoff process $P(t, E)$
ハ stable distribution $\varphi(E)$ γ オツトイフ。特 =
 $\varphi(E)$ が uniform distribution $\varphi(E) = m(E)$
デアルトキ $P(t, E)$ ハ stable uniform distri-
bution γ オツトイフ。

カナル Markoff process = 對シテ mean
ergodic theorem が成立スルコトヲ吉田氏が証明サ
レタ。(本号ノ吉田氏ノ談話参照) 即チ $\varphi(E)$ = 對シテ
absolutely integrable + 函数全体 $L(\varphi)$
= テ表ハセバ $X(t) \in L(\varphi)$ ナルトキ $T^n X = Y_n$
 $Y_n(t) = \int P^{(n)}(t, ds) X(s)$ トオケバ $Y_n(t) \in L(\varphi)$
トナリ⁽¹⁾ 且ツ任意ノ $X(t) \in L(\varphi)$ = 對シテ $X^*(t) \in L(\varphi)$

(1) Operator T^n ハ $L(\varphi)$ = 於テ norm 1 トナル。

が存在して.

$$\int \left| X^*(t) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int P^{(n)}(t, ds) X(s) \right| g(dt) \rightarrow 0$$

トナル。

コレハ非常ニ面白い結果デアルト思フ。先ヅ第一ニ實際問題ニ表ハレテ来ル Markoff process ハ大テイ stable distribution ヲモツテキル。特ニ uniform stable distribution ヲモツトキが大ヘン多イノデアイル。

例ヘバ $P(t, E)$ が density $p(t, s)$ ヲモチ (即チ $P(t, E) = \int_E p(t, s) ds$) 且ツコノ density $p(t, s)$ が t, s ニ関シテ symmetric デアル場合ガソレデアイル。又 $P(t, E)$ が measure preserving transformation $S(t) =$ ヲツテ與ヘラレルトキ、(即チ $S(t) \in E$ ナルトキ $P(t, E) = 1$ 。然ラザルトキ $P(t, E) = 0$) ハソノ例デアイル。

後者ノ場合ニハ良ク知ラレテキル如ク J. U. Neumann ノ mean ergodic theorem が成立スルカラ以上ノ吉田氏ノ結果ハ V. Neumann ノ ergodic theorem ヲ特殊ナ場合トシテ含ムヲケデアイル。⁽¹⁾

第二ニ上ノ mean ergodic theorem ハ uniform ergodic theorem 成立シテイ mean ergodic theorem ノ一ツノ一般ナ example ヲ

脚註ハ次頁ヘ

嶺ヘルト云フ意味ヲ重要デアル。

即ち、J. V. Neumann / mean ergodic theorem ハ吉田氏及ビ筆者ニヨツテ inverse ノ存在シタイ markoff process ノ場合ニ拡張サレタガ (Doob 及ビ Doeblin / case) コレヲノ場合ニハ單ニ mean ergodic theorem ガ成立スルノミナラズ更ニソレヨリモ強イ uniform ergodic theorem ガ成立シテシマフノデアル。ヨツテ mean ergodic theorem ガ成立シテシカモ uniform ergodic theorem ノ成立シタイ example ガ欲シカッタノデアル。

(L^p) ($p > 1$) ノトキニハカナル example ハ容易ニ作レルガ (L^1) = (L) ノ markoff process ノ時ハ measure preserving transformation ノ場合以外ニカナル example ヲ作ルコトハ困難デアッタノデアル。

吉田氏ノ上ノ結果ノ証明ハ elementary ナ非常ニ面

前頁脚注

(1) J. V. Neumann / mean ergodic theorem ハ (L^2) = テ述ベラレタキルガ (L) = (L^1) = 於テモ (strong + 收斂) mean ergodic theorem ガ成立スルノデアル。

(L) = (L^1) ハ uniform (stable) distribution $\varphi(E) = m(E) =$ 開スル $L(\varphi) =$ 外ナラス。

白イモノデアルガ、實ハソレヨリモモウ少シ精シイ結果ガ
Doobノ方法ヲ使ヘレバ得ラレル、デ次ニソレニツイテ述ベ
テ見タイト思フ、

即チ $L(\varphi)$ ヲ考ヘレ代リ $= M(\varphi)$ ナル $\varphi =$ 関シテ
bounded measurable ナ函数ノ空間 ($\varphi(E)=0$
ナル E ノ上ニテ取ル値ハ任意) ヲ考ヘレバ $X(t) \in M(\varphi)$
ニ對シテ $T^n X = Y_n$ $Y_n(t) = \int P^{(n)}(t, dS) X(S)$ ハ
又 $M(\varphi) =$ 属シテ ⁽¹⁾ 且ツ任意ノ $X(t) \in M(\varphi) =$ 對シテ
 $X^*(t) \in M(\varphi)$ ガ存在シテ

$$\frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \int P^{(m)}(t, dS) X(S)$$

ハ $X^*(t) = \varphi =$ 関シテ almost everywhere = 收
斂スル。即チ $X \in M(\varphi) =$ 関シテ Birkhoff 型ノ er-
godic theorem ガ成立スルノデアアル。(コレハ §3 デ
証明スル)

Operator T ($X \rightarrow TX = Y$) ガ $L(\varphi) \rightarrow L(\varphi)$
ニウツシ且ツ $M(\varphi) \rightarrow M(\varphi) =$ ウツシ、シカモ何レモ norm
ガ 1 デアル場合ニ、 $M(\varphi) =$ 於ケル Birkhoff type
ノ ergodic theorem カラ $L(\varphi) =$ 於ケル v. Neu-
mann type ノ mean ergodic theorem ヲ
証明スルコトハ容易デアルカラ (コレハ §2 ニテ証明ス
ル)

(1) Operator T^n ハ $M(\varphi) =$ norm 1 トナル。

コレ = ヨツテ吉田氏ノ結果ヨリモ少シ精シイコトが得ラ
レタヲケデアル。Doobハコノ結果ヲ特殊ナ場合ニシカ論
ジテキナイノデ果シテドコマデDoobハコノ問題ヲ考ヘテ
キタカハ疑問デアアル。

シカモDoobハmean ergodic theoremハ少
シモ論ジテキナイカラDoobが吉田氏ノ結果ヲ全然得ラキ
ナイコトハ確実デアアル。

シカシコレニ注意スベキコトハ $X(t) \in M(\mathcal{P})$ ニ對シ
テノ $\equiv$ Birkhoff型ノergodic theoremが証明
出來テ $X(t) \in L(\mathcal{P})$ ニ對スルBirkhoff型ノergodic
theoremが未ダ証明出來テキナイコトデアアル。 $P(t, E)$
がmeasure preserving transformation
 $S(t)$ ニヨツテ與ヘラレルトキハ確カニコレハ成立スレノ
デアアルカラ、一般ノstable distributionヲモツ
場合ニ果シテ $X(t) \in L(\mathcal{P})$ ニ關スルBirkhoff型ノ
ergodic theoremが成立スルカドウガチ確カメルコ
トハ大ニ興味ガアルト思フ。

§ 2

Birkhoffノergodic theoremカラv. Neumann
ergodic theoremヲ証明スルコト。

議論ヲ簡單ニスルタメ Ω が $0 \leq t \leq 1$ ナルinterval
デstable distribution $\mathcal{P}(E)$ がuniform
distribution $m(E)$ デアアル場合ヲ考ヘル。(一般ノ

場合ハ全然同シ)

即チ Simple, homogeneous + Markoff process, kernel $P(t, E)$ が $\int_0^t P(t, E) dt = m(E)$ を満足シテキルトキヲ考ヘル. 特ニ $P(t, E)$ が measure preserving transformation $S(t) = \text{ヨツテ}$ $S(t) \in E$ トキ $P(t, E) = 1$. 然ラザルトキ $P(t, E) = 0$ トシテ與ヘラレルトキハ普通, Birkhoff 及ビ V. Neumann, ergodic theorem, 場合デアアル.

$$X(t) \in (L) = \text{對シテ } TX = y: y(t) = \int_0^t P(t, ds) X(s)$$

トオケバ $y(t) \in (L)$ デアリ. 特ニ $X(t) \in (M)$ ナラバ $y(t) \in (M)$ トナル. シカモ容易ニワカル如ク $X \rightarrow TX = y$ ナル linear operator ハ (L) 上 (L) 自身ニウツス operator トシテモ亦 (M) 上 (M) 自身ニウツス operator トシテモ norm 1 デアル. 今 $(M) = \text{於テ}$ Birkhoff の定理が成立スルトセヨ.

即チ $X(t) \in (M) = \text{對シテ } X^*(t) \in (M)$ ガ定マツテ

$$(\Delta) \quad \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \int P^{(m)}(t, ds) X(s) \rightarrow X^*(t) \text{ almost}$$

everywhere デアツタトセヨ. コノ左辺ハ昭カニ n, t

関シテ一様ニ有界デアルカラ $t = \text{関シテ } (0, 1) = \text{テ}$ 積分スレバ

$$\int_0^1 \left| \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \int P^{(m)}(t, ds) x(s) - x^*(t) \right| dt \rightarrow 0$$

即チ (operator) 記号デカケバ)

$$(*) \quad \left\| \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n T^m(x) - x^* \right\|_L \rightarrow 0$$

ガ任意ノ $x \in (M) =$ 對シテ成立スル。但シ $\| \cdot \|_L \wedge (L)$
 $=$ 於ケル norm ヲ表ハス。然ル $= (M) \wedge (L)$ ノ中
 $= (L)$ ノ topology $=$ dense デアリ且ツ

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n T^m(x) - x^* \right\| &\leq \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \|T^m(x)\| + \|x^*\| \\ &\leq 2\|x\| \end{aligned}$$

デアルカラ (*) ハ任意ノ $x \in (L) =$ 對シテ成立スル。即チ
 $(L) =$ 於ケル mean ergodic theorem ガ証明出
 來タ。

次ニ、特ニ $P(t, E)$ ガ measure preserving
 transformation $S(t) =$ ヲツテ與ヘラレルトキハ
 $x \rightarrow T(x) = y \wedge (L^p) (p > 1) =$ 於ケル norm 1 ノ
 linear operator ト考ヘラレルカラ全ク同ジ方法ニヨ
 ツテ $(L^p) (p > 1) =$ 於ケル mean ergodic theorem
 ヲ証明スルコトが出来ル。即チ (Δ) ヲリ

$$\sqrt[p]{\int_0^1 \left| \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \int P^{(m)}(t, ds) x(s) - x^*(t) \right|^p dt} \rightarrow 0$$

ヨツテ

$$(**) \quad \left\| \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n T^m(x) - x^* \right\|_{L^p} \rightarrow 0$$

が $X \in (M) =$ 對シテ成立スル。但シ $\| \cdot \|_{L^p}$ は $(L^p) =$ 於ケル normヲ表ハス。然ルニ $(M) \cap (L^p) = \tau(L^p)$ 、
 $topology = \tau$ dense デアリ且ツ

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n T^m(X) - X^* \right\|_{L^p} \leq 2 \|X\|_{L^p}$$

デアルカラコレヨリ $(**)$ が任意ノ $X \in (L^p) =$ 對シテ成立
 スル。コレデ $(L^p) =$ 於ケル mean ergodic theorem
 が証明出來タ。

注意。 深宮氏⁽¹⁾ハ (L) = 於ケル Birkhoff, er-
 godic theorem カラ (L^p) ($p > 1$) = 於ケル mean
 ergodic theorem が出ルコトヲ dominated er-
 godic theorem ヲ使ツテ証明シテキルが以上ノマウナ
 考ヘニヨレバ遙カニ簡單デアル。

- (1) M. Fukamiya. Dominated ergodic theorems,
 Tôhoku Math. Journ.