



Title	A.N.Kolmogoroff : 可附番無限個ノ可能ナ状態ヲ持ツ Markoff連鎖
Author(s)	樋口, 順四郎
Citation	全国紙上数学談話会. 1940, 192, p. 1-25
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74763
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

833. A. N. Kolmogoroff: 可附番無限個ノ 可能ナ状態ヲ持ツ Markoff連鎖

樋口 順四郎訳 (阪大)

A. Kolmogoroff の *Recueil Math.* (1(43) (1936) 607-610) = *Anfangsgründe der Theorie der Markoffschen Ketten mit unendlich vielen möglichen Zuständen*
ト題スル論文ヲ発表シマシタガ、ソコデハ詳細ナ説明ハ述ベ
ズ。Bulletin de l'université d'état à Moscou
(Sec A, vol. 1, 1939)ノ論文 *Cepi Markova so sčetrnym čislom vozmožnyx sostojanij*
(*Chaînes de Markoff avec une infinité dénombrable des états possibles*)ヲ始メ
テソノ詳細ヲ述ベテキマス。以下ハソノ翻譯デス。

§ 1. 記號

考察ノ對象トナル system ノ個々ノ可能ナ状態ヲ E_i
デ表ハス。茲ニ i ハスベテノ自然数ヲ動ケモノトスル。トハ
イヘ、 i ガ有限ノ値ニ止マル場合ニモ、後述ノ議論ハ有效デ
アロウ。コノ場合ニハ議論ヲ省略ニナシ得レコト明カデアラ
ウ。 E_i カラ E_j へ one step カノ遷移確率 p_{ij} ハ

$$p_{ij} \geq 0 \quad (1)$$

$$\sum_j p_{ij} = 1 \quad (2)$$

ヲ満足スル。 E_i カラ E_j へ n step へ遷移確率 $P_{ij}^{(n)}$ ハ
次ノ等式ヲ帰納的に定義サレル。

$$P_{ij}^{(0)} = \delta_{ij} \begin{cases} = 1 & i=j \\ = 0 & i \neq j \end{cases} \quad (3)$$

$$P_{ij}^{(n+1)} = \sum_k P_{ik}^{(n)} P_{kj} \quad (4)$$

更ニ E_i カラ E_j へ n step へ始メテ遷移スル確率ヲ
 $K_{ij}^{(n)}$ デ表ハス。明ラカ

$$K_{ij}^{(n)} = P_{ij}^{(n)} - K_{ij}^{(1)} P_{jj}^{(n-1)} - \dots - K_{ij}^{(n-1)} P_{jj}^{(1)} \quad (5)$$

特ニ K_{ij} ハ状態 E_i カラ出テ n step 後ニハジメテモトノ
 E_i へ戻ル確率デアル。尚

$$\sum_{n=1}^{\infty} K_{ij}^{(n)} = L_{ij}$$

ト書ク。 $L_{ij} = 1$ デアレバ system ハ状態 E_i カラ出テ
早晚状態 E_j へ到達シナケレバナラナイ。 E_i カラ E_j
へ遷移スルニ必要ナ step 数ノ数学的期望値ハ

$$M_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} n K_{ij}^{(n)} \quad (7)$$

デアル。特ニ M_{ii} ハ最初 E_i ニアツタモトガ、 E_i へ戻ル
ニ要スル step 数ノ数学的期望値デアル。 M_{ij} ハ有限ニモ
無限ニモナリ得ル。

§2. 非本質的状態, 本質的状態ノくらす及

に部分くらす。

$P_{ij}^{(n)} > 0$ トナル n, j ハ存在スルガ、凡テ m = 就キ $P_{ji}^{(m)} = 0$ デアルトキ、即チ E_i カラ E_j へノ遷移可能デア
ルガ、 E_j カラ E_i へハ遷レナイ場合 = 状態 E_i ハ 本質的
(essential) デナイト稱スル。ソノ他ノ状態ハ essential
デアルト云フ。 E_i, E_j ガ共ニ essential デ $P_{ij}^{(n)} > 0$
トナル n ガ存在スルナラバ、 $P_{ji}^{(m)} > 0$ トナル m ガ又存
在シナケレバナラヌ事ハ明ラカデアヌ。コノヤウナ n 及ビ m
ガ存在スル場合 = E_i 及ビ E_j ハ mutually connected
デアルト云フ。

今 E_i ト E_j トガ互ニ connected デ、 E_j ガ E_k ト
connected デアレバ、 E_i ト E_k ハ又互ニ connected
デアヌ。故ニスベテノ essential ナ状態ハくらす $S^{(2)}$
ニ分タレ、一ツノくらすニ属スルモノハ互ニ connected
デアリ、異ルくらすニ属スルモノトハ connected デナイ。
加之、essential ナ状態 E_i ト essential デナイ状態
 E_j トニ対シテハ明ラカニ $P_{ij}^{(n)} = 0$ デアル。此ノ様ニシテ
吾々ノ system ハ一度くらす $S^{(2)}$ ノ何レカニ入レバ決シ
テソノくらすノ増外ニ出レコトハナイ。

次ニ任意ノ essential ナ状態 E_i ヲ考ヘヨウ。 $P_{ii}^{(n)} > 0$
トナル n ノ集合ヲ M_i トスレバ、 E_i ハ essential デア
ルカラ M_i ハ空デハナイ。 $n, m \in M_i$ デアレバ $n+m \in M_i$
デアヌ。 d_i ヲ M_i = 属スル数ノ最大公約数トスルト、

m_i は d_i の倍数、ミカラナリ、充分大キナ d_i の倍数ハ
 m_i = 属スルコトが容易ニ証明サレル。数 d_i ハ状態 E_i
 ノ周期ト呼ベレル。

同一ノクラス $S^{(\alpha)}$ = 属スル総テノ状態ハ同一ノ周期ヲ
 持ツコトが容易ニ証明デキテ、コノ共通ノ周期ヲクラス $S^{(\alpha)}$
 ノ周期ト称シ $d(\alpha)$ ト書ク。實際、ニツノ状態 E_i, E_j が
 同一ノクラス $S^{(\alpha)}$ = 属スルナラ $P_{ij}^{(n)} > 0$ 及ビ $P_{ji}^{(m)} > 0$
 トナルル、 m ヲ見込スコトが出来ル (コノ様ナル m ハ前
 = 述べタ通り存在スル)。左ガ充分大キケレバ $P_{ji}^{(kd_j)} > 0$ デ
 アルカラ、従ッテ又

$$P_{ii}^{(kd_j + n + m)} \geq P_{ij}^{(n)} P_{jj}^{(kd_j)} P_{ji}^{(m)} > 0,$$

即チ充分大キナ k = 對シテ $kd_j + n + m$ ノ形ノ数ハ m_i =
 属スル。シカシコレハ d_j が d_i デ割り切レルトキニ限り可
 能デアル。同様ナ理由デ d_i ハ d_j デ割り切れナクテハナラ
 ナイ。即チ $d_i = d_j$ デアル。

同一ノクラス $S^{(\alpha)}$ = 属スルニツノ状態 E_i, E_j = 對シ
 同時 = $P_{ij}^{(n)} > 0$ 及ビ $P_{ji}^{(m)} > 0$ トナルノハ n ト m が mod.
 $d(\alpha)$ デ congruent ナトキニ限ル。故ニ $S^{(\alpha)}$ カラ勝手
 ニ E_i 。ヲ一ツ取り出せば、同一ノクラスノ E_i = 對シテハ
 $P_{i,i}^{(n)} > 0$ トナルノハ $n \equiv \beta(E_i) \pmod{d(\alpha)}$ ノ時ニ
 限ル。又 $\beta(E_i) = 1, 2, \dots, d(\alpha)$ ガ定マレル。同シ $\beta(E_j)$
 ヲ持ツ状態 E_j ノスベテヲ部分クラス $S_{\beta}^{(\alpha)}$ = 属セシメル。
 斯ノ様ニ $S^{(\alpha)}$ ハ $d(\alpha)$ 個ノ部分クラス $S_{\beta}^{(\alpha)}$ = 分レル。吾

々、system の各 step = 於て、 $S_{\beta}^{(\alpha)}$ = 属スルアル状態カ
 ラバハズ $S_{\beta+1}^{(\alpha)}$ ノ、ソレ=遷移スル、但シ $\beta = d(\alpha)$ ノ時
 ハ $S_{\beta}^{(\alpha)}$ ノ、ソレ=遷移スル。カクシテ E_i, E_j が部分くらす $S_{\beta}^{(\alpha)}$ 、
 $S_{\gamma}^{(\alpha)}$ = 属スレバ、 $P_{ij}^{(n)}$ ハ $n \equiv \gamma - \beta \pmod{d(\alpha)}$ ノ時
 = 限ツテ 0 ト異ル、又、一オ充分大キナ上述ノ合同式ヲ満スル
 = 対シテハ $P_{ij}^{(n)} > 0$ デアル。

§3. 再歸及ビ非再歸くらす

状態 E_i ヲ出テ何時カハ一度 E_j ヲ訪レル確率 L_{ij} 、
 他ニ、 E_i ヲ発シテ E_j ヲ無限ニ訪レル確率 Ω_{ij} ヲ考察シ
 ヲウ。明ラカニ不等式、

$$\Omega_{ij} \leq L_{ij} \quad (8)$$

が成立スル。一オ吾々ハ此処デ次ノ lemma ヲ証明シ
 ヲウ。

Lemma I $L_{ii} = 1$ + ラバ $\Omega_{ii} = 1$ デアル。

証明: E_i ヲ出タノチ、少クト k 回同一ノ状態 E_i
 ヲ訪レル確率ヲ $T_{(k)}$ ト書ク。常ニ

$$T_{(1)} = L_{ii}, T_{(k+1)} = T_{(k)} L_{ii}, \Omega_{ii} = \lim_{k \rightarrow +\infty} T_{(k)}$$

デアルコトハ明ラカデアル。 $L_{ii} = 1$ ノ場合ニハ上ノ式カラ
 $\Omega_{ii} = 1$ デアルコト明白デアル。

此ノほらぐらふ及ビ次ノ若干ノほらぐらふニ於テハ
 專ラ essential element ノ各くらす内デノ相互関係
 ノミニ関心ヲ持ツ。換言スレバ、状態ニ関スルズベテノ index

ハタミーツノくらす内ノソレノミヲ動クモノト仮定スル。定理ノ敘述デハコレヲ「ミーツノくらすノ範囲内ニ於テ」ト云フ言葉ヲ表現スル。

定理 I c ミーツノくらすノ範囲内ニ於テハ、スベテノ $\Omega_{ij} < 1$ デアルカ、或ヒハスベテノ $\Omega_{ij} = 1$ デアルカノ何レカデアル。

証明: 任意ノ i, j, k = 對シテ次ノ關係ヲ言ヘバ充分デアルコト明ラカデアル。

$$1) \quad \Omega_{ij} = 1 \quad \text{トラバ} \quad \Omega_{ik} = 1$$

$$2) \quad \Omega_{ji} = 1 \quad \text{トラバ} \quad \Omega_{ki} = 1$$

モシコノニツガ成立スレバ、任意ノ i, j, i', j' = 對シテ、 $\Omega_{ij} = 1$ とラバ $\Omega_{ij'} = 1$ 、從ツテ $\Omega_{i'j'} = 1$ とナル。

1)ノ証明=移テヨ。 $\Omega_{ij} = 1$ 、即チ確率 1ヲ以テ、狀態 E_i ヲ出タ後 = E_j ニ無限ニカヘルト假定スル。 E_j ヘノ S 回ト $S+1$ 回ノ復歸ノ途中ヲ考ヘヨウ。考ヘテキル狀態ハスベテ同一ノくらすニ屬スルカラ、 E_j ヘノ S 回ト $S+1$ 回ノ復歸ノ途中デ、特定ノ狀態 E_k ヲ訪レル事象 $\mathcal{U}_S$ ハ正ノ確率ヲ持ツ。コノ確率ハ Δ ニハ無關係デ、 $\mathcal{U}_S$ 自身モ亦 Δ ヲ變ヘタトキ互ニ独立デアルコトハ容易ニ認メルコトが出来ル。

シカルニ同一ノ正ノ生起ノ確率ヲ持ツ事象 $\mathcal{U}_S$ ノ系列中、無限ニ多クハ 確率 1ヲ以テ實現サレル^{*}、即チ $\Omega_{ik} = 1$ デ証明

* Borel-Cantelli, 定理 (訳者註)

スベキ事柄 = 他ナラヌ。

残ルハ 2) の証明デアル。ソレニハ任意ノ $i, j, k, n =$
就キ成立スル次式ヲ利用スル。

$$\Omega_{ji} = \sum_k P_{jke}^{(n)} \Omega_{ki} \quad (9)$$

$\sum_k P_{jke}^{(n)} = 1$ デアルカラ, $\Omega_{ji} = 1$ デアルナラバ, $P_{jke}^{(n)} > 0$
トナルスベテ, k = 対シテ $\Omega_{ki} = 1$ デナケレバナラナイ。
シカモ (同一くらすノ範圍デ) 任意ノ j, k = 対シテハコノ
様ナル n ハ存在スル。斯クシテ 2), ソレト同時ニ定理 1a
ガ証明出来タ。

モシスベテノ $\Omega_{ij} = 1$ デアレバ, 不等式 (8) = 依リス
ベテノ $L_{ij} = 1$ デナケレバナラヌ。モシ又スベテノ $\Omega_{ij} < 1$
ナラバ Lemma 1 = ヨリスベテノ $L_{ij} < 1$ デナケレバ
ナラヌ。依ツテ

定理 1b 一ツノくらすノ範圍内ニ於テハ, スベ
テノ $L_{ii} < 1$ デアルカ, 或ヒハスベテノ $L_{ij} = 1$ デアル
カノ何レカデアル。

スベテノ $L_{ii} < 1$ ノ場合ニハ, $L_{ij} = 1 (i \neq j)$ ト
ナリ得ルコトハ指摘シテおくベキデアロウ。

スベテノ $L_{ij} = 1$ 及ビスベテノ $\Omega_{ij} = 1$ デアレバ,
再帰くらす (vozvratnyj klass) ト云フ。之レニ及
シスベテノ $L_{ij} < 1, \Omega_{ij} < 1$ ノ時ニハ, 非再帰くら
すト呼バレル。状態 E_j ガ非再帰くらすニ属シ, E_i ガ任
意ノ時ニ

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$$

デアルコトハ容易ニ確認スルコトガデキル。

§4. 正くらす及びぬるくらす

此ノほらぐらふデハ再帰くらすノ各々ノ内部ニ觀察サレル現象ヲ考ヘル。ソノ結果トシテ再帰くらすハ正及びぬる (null)ノニツニ分割サレル。然シ次ノほらぐらふデハぬるくらすト同時ニスベテノ非再帰くらすニモ触レルコトヲ注意シテオク。

再帰くらすヲ研究スルトキニ、幾何的期望値 $M_{ij}^{(n)}$ (参照) ハ基本的ニ意味ヲモツ。ソレニ關係シテ吾々ハ平均

$$\pi_{ij}^{(n)} = \frac{1}{n} (p_{ij}^{(1)} + p_{ij}^{(2)} + \dots + p_{ij}^{(n)}) \quad (10)$$

ヲ考ヘヨウ。

Lemma II 再帰くらすノ任意ノ E_i ニ對シ、 M_{ii}

ガ有限ナラバ

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \pi_{ii}^{(n)} = \frac{1}{M_{ii}} ;$$

$M_{ii} = +\infty$ デアレバ

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \pi_{ii}^{(n)} = 0$$

証明： 状態 E_i カヲ出発シテ、同一ノ状態ニ無限ニ歸

ソテクル確率ハ 1 = 等シイ。最初ノ復歸ガ $n_1^{th} \Delta t$ $n =$,
 第二回ガ $n_2^{th} \Delta t$ $n =$, 一般ニ第 k 回ガ $n_k^{th} \Delta t$ $n =$
 起ルトスル。

$x_1 = n_1, x_2 = n_2 - n_1, \dots, x_k = n_k - n_{k-1}, \dots$
 ナル差ハ, x_i = 独立デ、スベテ = 對シテ同一ノ分布ノ法則:
 $x_k = \Delta$ ガ確率 $K_{ii}^{(\Delta)}$ ノモツ *variable aléatoire* ノ
 系列デアアル。明ラカニ, M_{ii} ハ x_k ノ数学的期望値 = 他ナ
 ラス。

最初 *variable aléatoire* x_k ノ数学的期望値
 M_{ii} ガ有限ナ場合ヲ考ヘル。コノ時ハ A. Khintchine (ビ
 ンチン) ノ定理* = 依リ系列 $\{x_k\}$ ハ大數ノ法則 = 従フ。
 即チ任意ノ $\varepsilon > 0$ = 對シ k_0 ガ存在シ, $k > k_0$ ナラバ

$$\left| \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k x_j - M_{ii} \right| = \left| \frac{n_k}{k} - M_{ii} \right| \geq \frac{\varepsilon}{2}$$

トナル確率ハ ε ヨリ小サシ, $\varepsilon < \frac{1}{2}$ 及ビ $n \geq n_0 = 2k_0 M_{ii}$
 トシ,

$$k' = \frac{n}{M_{ii}} (1 - \varepsilon), \quad k'' = \frac{n}{M_{ii}} (1 + \varepsilon)$$

トオケバ $k' \geq k_0, k'' \geq k_0$ デアルコトハ容易ニ合ル。故
 = $1 - \varepsilon$ ヨリ大キナ確率ヲモツテ次ノ不等式ガ成立スルコ
 トガ認めラレル。

$$\left| \frac{n_{k'}}{k'} - M_{ii} \right| < \varepsilon,$$

* C. R. Paris 1880 p. 471 參照

シカル = コノ不等式カラ ($M_{ii} \geq 1$ デアルカラ)

$$|n_{k'} - n(1-\varepsilon)| < k'\varepsilon \leq n\varepsilon$$

ガ従ヒ, コレカラ

$$n_{k'} < n$$

同様ニ, $1-\varepsilon$ ヨリ大キナ確率ヲモツテ

$$\left| \frac{n_{k''}}{k''} - M_{ii} \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$|n_{k''} - n(1+\varepsilon)| < \frac{k''\varepsilon}{2} \leq n\varepsilon,$$

$$n_{k''} > n$$

ガ成立スル。カクシテ $n \geq n_0$ トラバ $1-2\varepsilon$ ヨリ大キナ確率デ

$$n_{k'} < n < n_{k''}$$

ガ成立スル。即チ最初ノ n step 後ニテ = 状態 E_i へ歸ッ
テクル回数 ψ_n ハ k' ト k'' トノ間ニアル。最初ノ n step
ノ間ニ状態 E_i へカヘル頻度 (Frequency) $\frac{\psi_n}{n}$ ノ数學的
期望値ハ $\Pi_{ii}^{(n)}$ ニ等シイコトハ容易ニ分ル。 $n \geq n_0$ トラバ
 $\frac{\psi_n}{n}$ ハ $1-2\varepsilon$ ヨリ大キナ確率ヲモツテ $\frac{k'}{n}$ ト $\frac{k''}{n}$ ノ間
ニアルカラ

$$\frac{k'}{n} = \frac{1}{M_{ii}}(1-\varepsilon) < \frac{\psi_n}{n} < \frac{1}{M_{ii}}(1+\varepsilon) = \frac{k''}{n},$$

ソシテ常ニ $0 \leq \frac{\psi_n}{n} \leq 1$, $M_{ii} \geq 1$ デアルカラ, $n \geq n_0$

デアレバ

$$\left| \Pi_{ii}^{(n)} - \frac{1}{M_{ii}} \right| \leq \mathbb{E} \left| \frac{\psi_n}{n} - \frac{1}{M_{ii}} \right| \leq \frac{\varepsilon}{M_{ii}} + 2\varepsilon,$$

コレカラ

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{i=1}^{(n)} \pi_{ii} = \frac{1}{M_{ii}}$$

次 $M_{ii} = +\infty$ の場合ヲ考ヘル。コノ時ハ $M < +\infty$, $\varepsilon > 0$ が何デアラウト, k_0 が存在シテ, $k \geq k_0$ ナラバ

$$\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k x_j = \frac{n_k}{k} \leq M$$

トナル確率ハ ε ヨリ小サクナル。コノ事情ヲ証明スルニハ, 新ラレイ互ニ独立ナ *variable aléatoire* x'_k ア, 對應スル x_k ヨリモ小サナ (スベテノ k ニツキ $x'_k \leq x_k$), 數學的期望値ハ, 例ヘバ $2M$ ニ等シモノヲ導入シ, コレニ前述ノ大数ノ法則ヲ適用スレバ十分デアイル。

$$k = \left[\frac{n}{M} \right] + 1 > \frac{n}{M} \text{ トスレバ, } n \geq k_0 M \text{ ナラバ } k \geq k_0$$

トナリ, $1 - \varepsilon$ ヨリ大キナ確率ヲモツテ次ノ不等式が成立スルヲ見ル。

$$\frac{n_k}{k} > M, \quad n_k > kM \geq n, \quad \psi_n \leq k \leq \frac{n}{M} + 1,$$

$$\frac{\psi_n}{n} \leq \frac{1}{M} + \frac{1}{n}$$

従ツテ, $n \geq k_0 M$ ナラバ

$$\prod_{i=1}^{(n)} \pi_{ii} = E\left(\frac{\psi_n}{n}\right) \leq \frac{1}{M} + \frac{1}{n} + \varepsilon,$$

コレヲ今ノ場合ニハ

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{i=1}^{(n)} \pi_{ii} = 0$$

ヲ結論スルコトが出来ル。

定理 II 同一ノクラスノ範囲内ニ於テハ, M_{ii} ガスベテ無限大デアアルカ, M_{ij} ガスベテ有限デアアルカ, 何レカデアアル。

証明: 同一ノクラスニ属スル任意ノ二ツノ状態 E_i, E_j ニツキ $P_{ij}^{(k)} > 0, P_{ij}^{(m)} > 0$ トナル左及ビ m ハ存在スル。更ニ任意ノ n ニ對シテ明ニ

$$P_{jj}^{(n+k+m)} \geq P_{ji}^{(m)} P_{ii}^{(n)} P_{ij}^{(k)}$$

コノ不等式カラ容易ニ次ノ式が出ル。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{H}_{jj}^{(n)} \geq P_{ji}^{(m)} P_{ij}^{(k)} \lim_{n \rightarrow \infty} \Pi_{ii}^{(n)}$$

從ツテ $\Pi_{ii}^{(n)}$ ノ極限ハ (狭ヘラレタクラス内ノ) 總テ i ニツキ, 0 デアアルカ > 0 デアアル。故ニ Lemma IIニヨリ M_{ii} ハスベテ有限カ無限大デアアル。

M_{ii} カ有限ナラ M_{ij} カスベテ有限デアアルコトノ証明ガ殘ル。ソノタメニ $R_{ij}^{(n)}$ ヲ E_i カラ出テ, n step 後ニ, 途中デ E_i ヘ入ルコトナク, E_j ($j \neq i$)ヘ行ク確率トスル。シカルトキハ

$$M_{ii} = \sum_{m=1}^{\infty} m K_{ii}^{(m)} + \sum_{j \neq i} R_{ij}^{(n)} (M_{ji} + n)^*$$

シカルニ同一ノクラス内デ任意ノ i, j ニ對シ $P_{ij}^{(n)} > 0$ トナル n ヲ見出スコトガデキル。

* 脚註ハ次頁ヘ

コ) 様=シテ $M_{ji} = +\infty$ トラバ $M_{ii} = +\infty$ トナル。ロ
レデ証明ハ無事ニ終ル。スベテノ M_{ij} が有限ナクらすヲ正
くらす、スベテノ $M_{ii} = +\infty$ トナルくらすヲぬるくらす
(null class) ト呼ブ。null class テハアル M_{ij}
($i \neq j$) ハ有限ニナリ得ルコトハ指適レテオクベキデアヲ
ウ。

定理 III ぬるくらすニ於テハ、状態 E_i 及ビ E_j 1
如何ニ関セズ、確率 $P_{ij}^{(n)}$ ハ $n \rightarrow +\infty$ ニ際シ零ニ収斂ス
ル。

定理 III ノ証明ニハ次ノ lemma が必要デアル。

Lemma II b ぬるくらすニ於テハ、任意ノ $E_j =$
ニ對シ

$$\pi_{jj}^{(n, m)} = \frac{1}{m} \left(P_{jj}^{(m+1)} + P_{jj}^{(m+2)} + \dots + P_{jj}^{(n+m)} \right)$$

ハ $m \rightarrow +\infty$ ノトキ、 π ニ関レテハ一様ニ零ニ収斂ス
ル。

(前頁註)

* 実際 $r > n + 1$ $K_{ii}^{(r)} = \sum_{j \neq i} R_{ij}^{(n)} K_{ji}^{(r-n)}$

$$\begin{aligned} \text{故ニ } M_{ii} &= \sum_{m=1}^{\infty} m K_{ii}^{(m)} = \sum_{m=1}^n m K_{ii}^{(m)} + \sum_{r>n} r \sum_{j \neq i} R_{ij}^{(n)} K_{ji}^{(r-n)} \\ &= \sum_{m=1}^n m K_{ii}^{(m)} + \sum_{j \neq i} R_{ij}^{(n)} \sum_{s=1}^{\infty} (n+s) K_{ji}^{(s)} \\ &= \sum_{m=1}^n m K_{ii}^{(m)} + \sum_{j \neq i} R_{ij}^{(n)} (M_{ji} + n) \end{aligned}$$

証明: 最初ノ状態ヲ E_j トシ, (最初ノ n steps 中 = E_j = 戻ルカ否カ = ハ無関係ニ), $(n+1)^{th}$ steps 以後ニ $(n+1)^{th}$ steps デハジメテ状態 E_j が現ハレル確率ヲ $H^{(s)}$ トスル. コノ時

$$P_{jj}^{(n+k)} = \sum_{s=1}^k H^{(s)} P_{jj}^{(k-s)},$$

$$\begin{aligned} \Pi_{jj}^{(n,m)} &= \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m P_{jj}^{(n+k)} = \frac{1}{m} \sum_{s=1}^m H^{(s)} \sum_{k=0}^{m-s} P_{jj}^{(k)} \\ &= \sum_{s=1}^m H^{(s)} \frac{(m-s)}{m} \Pi_{jj}^{(m-s)} + \frac{1}{m} \sum_{s=1}^m H^{(s)} \dots (12) \end{aligned}$$

$r \geq r_0$ ナラバ常 = $\Pi_{jj}^{(r)} < \varepsilon$ トナル r_0 ヲトリ (ソレハ lemma IIa = ヨリ常 = 可能ナル); $m_0 > \frac{r_0}{\varepsilon}$ ト選テ、更ニ $m \geq m_0$ トスルト、 $m-s \leq r_0$ ナラ $\frac{m-s}{m} < \varepsilon$ トナリ $m-s \geq r_0$ ナラバ $\Pi_{jj}^{(m-s)} < \varepsilon$ トナル.

常 = $\frac{m-s}{m} \leq 1$, $\Pi_{jj}^{(m-s)} \leq 1$ デアルカラ、スベテノ

$m \geq m_0$ = 對シテ

$$\frac{m-s}{m} \Pi_{jj}^{(m-s)} < \varepsilon.$$

$$\sum_{s=1}^m H^{(s)} \leq 1$$

ヲ考慮スレバ (12) カラ $m \geq m_0$ デサヘアレバ $\Pi_{jj}^{(n,m)} < \varepsilon + \frac{1}{m}$ ヲ得ル. ε ハ任意ナルコ無関係ナルカラ、コレヲ lemma ハ証明サレタ.

定理 III ノ証明. 先ツ定理ノ証明ニハ, $i=j$ ノ時ニ

証明スレバ即ち $P_{jj}^{(n)} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow +\infty$) ヲ言ヘバ充分デア
コトヲ注意シヨウ。實際ニ, $P_{ji}^{(m)} > 0$ トナル m ヲ選ベバ
明カニ

$$P_{jj}^{(n+m)} \geq P_{ji}^{(m)} P_{ij}^{(n)}.$$

m ヲ固定シテ $n \rightarrow +\infty$ トスレバ, $P_{jj}^{(n+m)} \rightarrow 0$ カラ $P_{ij}^{(n)} \rightarrow 0$
ガ出ル。

$$\text{今 } \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} P_{jj}^{(n)} = \lambda > 0$$

ト假定シヨウ。コノ假定カラ矛盾ヲ生ズレバ定理 III ハ証明
サレタケデアル。

$$K_{jj}^{(a)} = A > 0$$

トナル整数 a ヲ選グ。任意ノ $\varepsilon > 0$ ニ對シ n_0 ガ存在シテ
 $n \geq n_0$ ナラバ

$$P_{jj}^{(n)} \leq \lambda + \varepsilon$$

ガ成立スル。更ニ, アル $\delta > 0$ ニ對シ

$$\sum_{n > m_0} K_{jj}^{(n)} < \delta$$

トナル $m_0 = m_0 \geq a$ ヲ選グ。然ルトキハ假定ニヨリ

$$n \geq n_0 + m_0, P_{jj}^{(n)} \geq \lambda - \eta \quad (\eta > 0)$$

デアレバ

$$P_{jj}^{(n-a)} \geq \lambda - \frac{\eta + \varepsilon + \delta}{A}$$

ガ成立スル。實際

$$\begin{aligned}
\lambda - \eta &\leq P_{jj}^{(n)} = K_{jj}^{(n)} P_{jj}^{(0)} + K_{jj}^{(n-1)} P_{jj}^{(1)} + \dots + K_{jj}^{(1)} P_{jj}^{(n-1)} \\
&= K_{jj}^{(a)} P_{jj}^{(n-a)} + \sum_{a \neq m < m_0} K_{jj}^{(m)} P_{jj}^{(n-m)} + \sum_{m_0 < m \leq n} K_{jj}^{(m)} P_{jj}^{(n-m)} \\
&\leq A P_{jj}^{(n-a)} + (1-A)(\lambda + \varepsilon) + \delta, \\
P_{jj}^{(n)} &\geq \lambda - \eta
\end{aligned}$$

＋ラバ $n \geq n_0 + m_0 + sa$ ナラバ

$$P_{jj}^{(n-a)} \geq \lambda - \frac{\eta + \varepsilon + \delta}{A} = \lambda - \eta_1,$$

$$P_{jj}^{(n-2a)} \geq \lambda - \frac{\eta_1 + \varepsilon + \delta}{A} = \lambda - \eta_2,$$

$$P_{jj}^{(n-sa)} \geq \lambda - \frac{\eta_{s-1} + \varepsilon + \delta}{A} = \lambda - \eta_s$$

カ出ル。茲ニ

$$\eta < \eta_1 < \eta_2 < \dots < \eta_s.$$

シカルニ任意ノ s 対シ $\eta_s < \frac{\lambda}{2}$ トナル様ニ $\eta > 0$, $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ ヲ選ビ出スコトカ出来ル。ソレニ對應スル n_0 ト m_0 トヲトレバ、スベテノ $n \geq n_0 + m_0 + sa$ 及ビ $P_{jj}^{(n)} > \lambda - \eta$ ニ對シテハノ不等式ヲ得ル。

$$P_{jj}^{(n)} > \frac{\lambda}{2}, P_{jj}^{(n-a)} > \frac{\lambda}{2} \dots P_{jj}^{(n-sa)} > \frac{\lambda}{2},$$

$$\pi_{jj}^{(n-sa, sa)} > \frac{1}{sa} \cdot s \cdot \frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{2a}.$$

$\frac{\lambda}{2a}$ ハ常数、 s ハ如何程デモ大キク出来、 n ハ固限レタ Δ 對シテハ如何ホドデモ大キキ値ヲトレコトカ出来ル。コレハ

Lemma II は矛盾スル。

§5. 正くらすノ内部ニ於ル漸近的關係

定理 III を証明スルコトニ依リ、第一近似トシテノぬるくらすノ研究ハ完了スル。正くらすニ関シテハ次ノ一般定理ガ成立スル。

定理 IV a 正くらす $S^{(\alpha)}$ ニ於テ、部分くらす $S_{\beta}^{(\alpha)}$ カラ E_i ヲ、 $S_{\gamma}^{(\alpha)}$ カラ E_j ヲ任意ニトルトキ、 n ガ $n \equiv \beta - \gamma \pmod{d(\alpha)}$ ナル値ヲトツテ無限大ニ赴ケバ、確率 $P_{ij}^{(n)}$ ハ i, j ニハ無關係ナ極限

$$P_j = \frac{d(\alpha)}{M_{jj}}$$

ニ收斂スル。

注意: $n \not\equiv \beta - \gamma \pmod{d(\alpha)}$ ノトキハステータスニ示シタ様ニ $(P_{ij}^{(n)})$ $P_{ij}^{(n)} = 0$ ナアル。定理 IV ノ証明ニハ一聯ノ lemma ガ必要ナアル。

Lemma III positive class ナハ任意ノ i, j 及ビ $\varepsilon > 0$ ニ對シ、 δ ノ n ニ對シテ E_i カラ出テ n^{th} $(n + m)^{\text{th}}$ step ノ間ニ少クトモ一回 E_j ヲ訪レル確率が $1 - \varepsilon$ より大ヤクトル様ナ m ガ存在スル。

証明: E_i ヲ出テ上述ノ期間中ニ E_j ヲ訪レ又確率ハ

$$P = \sum_{p=n+m}^{\infty} K_{ij}^{(p)} + \sum_{k=1}^{n-1} P_{ij}^{(k)} \sum_{p=n+m-k}^{\infty} K_{jj}^{(p)}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n+m}^{\infty} K_{ij}^{(p)} + \sum_{p=n+1}^{n+n-1} K_{jj}^{(p)} \sum_{k=n+m-p}^{(k)} P_{ij}^{(k)} + \sum_{p=n+m}^{\infty} K_{jj}^{(p)} \sum_{k=1}^{n-1} P_{ij}^{(k)} \\
&\leq \sum_{p=m}^{\infty} K_{ij}^{(p)} + \sum_{p=n+1}^{\infty} p K_{jj}^{(p)} = U^{(m)}
\end{aligned}$$

シカレ = モシ

$$M_{jj} = \sum_{p=1}^{\infty} p K_{jj}^{(p)}$$

が有限ナラバ、 $U^{(m)}$ は $m \rightarrow +\infty$ / トキ 0 = 収斂スル。 $U^{(m)}$ は n = 無関係デアレカラ、lemmaヲ証明サレタ。

Lemma IVa 一ツノ sub class カラナル positive class デハ

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_{ij}^{(n)} > 0$$

証: class が一ツノ sub class カラナルトキハ、
 $k \geq k_0$ ナラバ常 = $P_{jj}^{(k)} > 0$ トナル k_0 が存在スル。lemma
 III = 於ケル ε ヲ $\frac{1}{2}$ トシテ i, j = 対シテ lemma III が
 成立スル m ヲ選デ。

$$\lambda = \inf \left\{ P_{jj}^{(k_0)}, P_{jj}^{(k_0+1)}, \dots, P_{jj}^{(k_0+m)} \right\}$$

トオク。明ラカ = $\lambda > 0$ 。サテ $n' > m + k_0$ トシ、
 $n' = n + m + k$ トオク。状態 E_i ヲ出テ n^{th} , $n+m^{\text{th}}$
 step 間 = 状態 E_j ヲ訪レル確率ハ $\frac{1}{2}$ ヨリ大キイ。

n^{th} カラ $(n+m)^{\text{th}}$ step 間 = 最初ノ訪問ハ $(n+s)^{\text{th}}$
 step = 起ツタトセヨ ($s < m$)、コノ假定) 下テ $n' = m + m + k_0$ 。

step 1 後 = E_j へカへル条件確率 $P_{ij}^{(k_0+m-s)} \geq \lambda$ デ
 プル。コノ不等式ハ任意ノ $s (1 \leq s < m)$ デ成立ツ。故ニ
 E_j ヲ出テ $n' = n + m + k_0$ step 後 = E_j へカヘル全確率
 $P_{ij}^{(n')}$ ハ次ノ不等式ヲミタス。

$$P_{ij}^{(n')} > \frac{1}{2} \lambda$$

コレハ任意ノ n デ正シイナラ Lemma 1 証明ハ終ル。

Lemma IV b ーツノ sub class カラナル posi-
 tive class ナハ

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_{ii}^{(n)} = \frac{1}{M_{ii}}$$

証 先ツ $n \rightarrow +\infty$ ノトキノ極限ノ存在カラ始メル。

次ノ様ニ書ク。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ii}^{(n)} = a,$$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} P_{ii}^{(n)} = b.$$

Lemma IV a = ヲリ $b \geq a > 0$. $\varepsilon > 0$ トセヨ $j=i$
 = 対シ Lemma III ヲ満足スル m ヲ選ブ。更ニ $k \geq k_0$ ナラ
 次ノ不等式ガ成立スル様ニ k_0 ヲ選ブ。

$$a - \varepsilon < P_{ii}^{(k)} < b + \varepsilon$$

$n > m + k_0$ ヲ $P_{ii}^{(n)} < a + \varepsilon$, $n' > n + k_0$ ヲ $P_{ii}^{(n')} > b - \varepsilon$
 トナル ε ノトスル (コノ様ニ n, n' ハ常ニ見出カレル) $n' - n = k$
 トオケバ

$$P_{ii}^{(n')} = P_{ii}^{(k)} P_{ii}^{(n)} + A^{(1)} P_{ii}^{(n-1)} + A^{(2)} P_{ii}^{(n-2)}$$

$$+ \dots + A^{(n)} P_{ii}^{(0)}$$

コゝデ $A^{(s)}$ は、最初 $\wedge E_i = \text{アル条件デ}$, t_k^{th} ステップ以後デ
 $\wedge (t_k + \delta)^{\text{th}}$ ステップデハジナテ E_i へカヘル確率デアル。

明ラカ =

$$P_{ii}^{(k)} + \sum_{s=1}^n A^{(s)} \leq 1$$

ノミナラズ lemma III = $\exists$)

$$P_{ii}^{(k)} + \sum_{s=1}^m A^{(s)} > 1 - \varepsilon$$

コノニツノ不等式カラ、次ノコトガワカル。

$$\sum_{s=m+1}^n A^{(s)} < \varepsilon$$

尚ホ、 $s \leq m$ ナラ不等式 $n-s > k$ カ、從ツテ $P_{ii}^{(n-s)}$
 $< b + \varepsilon$ ガ成立スルコトヲ注意スル、コノ故 =

$$\begin{aligned} P_{ii}^{(n')} &= P_{ii}^{(k)} P_{ii}^{(n)} + \sum_{s=1}^m A^{(s)} P_{ii}^{(n-s)} + \sum_{s=m+1}^n A^{(s)} P_{ii}^{(n-s)} \\ &\leq P_{ii}^{(k)} (a + \varepsilon) + (1 - P_{ii}^{(k)}) (b + \varepsilon) + \varepsilon \\ &= b + 2\varepsilon - P_{ii}^{(k)} (b - a). \end{aligned}$$

コゝデ $P_{ii}^{(k)} > a - \varepsilon$, $P_{ii}^{(n')} > b - \varepsilon$, 及 $b - a \leq 1$ ナル故
 スレバ

$$b - \varepsilon \leq b + 2\varepsilon - (a - \varepsilon)(b - a) \leq b + 3\varepsilon - a(b - a),$$

$$a(b - a) \leq 4\varepsilon,$$

$$b - a \leq \frac{4\varepsilon}{a}$$

ヲ得ル。 $\alpha > 0$, $\varepsilon > 0$ ハ任意ナルカラ $b - a = 0$, コレ
ハ $P_{ii}^{(n)}$ ノ極限が存在シテ $b = a$ =等シイコトヲ示ス。

Lemma II α カラ間接ニヨリ極限ハ $\frac{1}{M_{ii}}$ =等シイコト
ガワカル。

定理 IV α ノ証明 與ヘラレタ Markoff 連鎖, ホ
カニ, 元々めんたり一遷移確率

$$\bar{P}_{ij} = P_{ij}^{(d)}$$

ヲ定義サレル新ヲシイ Markoff 連鎖ヲ考ヘヨウ。コ
ニ d ハ考ヘテアル d ノ周期ナル。明ラカニ吾々ノ d ノ
状態ニツイテハ

$$\bar{P}_{ij}^{(n)} = P_{ij}^{(nd)}$$

ナル。新シイ Markoff 連鎖ニアツテハ状態ノ d 個ノ
唯一ツノ部分ニ属スヨリタル。故ニ Lemma IV $b = 0$ リ

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_{ii}^{(nd)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{P}_{ii}^{(n)} = \frac{1}{M_{ii}} = \frac{d}{M_{ii}}$$

カクシテ定理 IV α ハ $i = j$ ナル場合ニ証明サレタ。一般ノ
場合ヲ証明スルタメニ,

E_i カラ E_j へ遷移スルニ要スル最小ノ step 数ヲ q
トスルト (明ニ $q \equiv \gamma - \beta \pmod{d}$),

$$P_{ij}^{(nd+q)} = \sum_{m=0}^n K_{ij}^{(nd+q)} P_{jj}^{(nd-md)}$$

トナル。シカレニ

$$\sum_{m=1}^{\infty} K_{ij}^{(md+q)} = 1$$

つまり, $P_{ij}^{(nd-md)}$ は m を固定して $n \rightarrow +\infty$ とすれば $\frac{d}{M_{jj}}$ に収斂スル。こゝ事カラ

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_{ij}^{(nd+q)} = \frac{d}{M_{jj}}$$

定理 IV a の本質的補足ハ

定理 IV b positive class である各々, sub class = 於ケルスベテノ状態ニ対スル極限 P_j ノ和ハ $\frac{d}{M_{jj}}$ に等シイ。

定理 IV b ハ次ノ lemma カラ容易ニ出ル。

Lemma V positive class = 於テハ, 任意ノ $\varepsilon > 0$ = 対シ, 有限個ノ状態ノ system $E_{j_1}, E_{j_2}, \dots, E_{j_k}$ ガアツテ, コノ class ノ任意ノ E_i ト充分大キトスベテノ n = 対シテ

$$\sum_{s=1}^k P_{i_0 j_s}^{(n)} > 1 - \varepsilon$$

証明: i_0 ノ任意ニ選ブ。Lemma III = ヲツテ, 任意ノ n = 対シ, E_{i_0} ノ出ヲ出テ n^{th} カラ $(n+m)^{\text{th}}$ ステップノ間ニ少クトモ $-\frac{\varepsilon}{3} \cdot E_{i_0}$ ノ訪レル確率が $1 - \frac{\varepsilon}{3}$ ヲリ大キクナル様ナ m ガ存在スル。

任意ノ $r \leq m$ = 対シ

$$\sum_{s=1}^k P_{i_0 j_s}^{(r)} > 1 - \frac{\varepsilon}{3}$$

トナル様ナ system $E_{j_1}, E_{j_2}, \dots, E_{j_k}$ フ選バコトハ
 増ニ可能ナル。コノ様ニ選ンダ system ガ Lemma 1
 条件ヲミタスコトヲ証明シヨカ。ソノタメニドレカーツニテ圖
 示シテ q フ

$$\sum_{t=1}^q K_{i i_0}^{(t)} > 1 - \frac{\varepsilon}{3}$$

トナル様ニ選ブ。 $n > m + q$ トシ $n = q' + m$, $q' > q$
 トオク。

$1 - \frac{\varepsilon}{3}$ ヨリ大キナ確率ヲ以テ最初 q' steps ナ E_i カ
 ラ E_{i_0} ヘ行リ。 $\leq q'$ ナル steps ナハ最初 E_{i_0} ヘハ戻ラ
 ス, $1 - \frac{\varepsilon}{3}$ ヨリ大ナル確率ナ q' th カラ $(q' + m)$ th steps
 間ナ E_{i_0} ヘ戻ル。モシコレガ $(q' + m - r)$ th steps ノド
 レカヲ起レバ、 $1 - \frac{\varepsilon}{3}$ ヨリ大キナ確率ヲ以テ $q' + m$ steps 後
 ニハ選バレタ状態ノーツ $E_{j_s} = \text{アル}$ 。カクシテ $(1 - \frac{\varepsilon}{3})^3 > 1 - \varepsilon$
 ヨリ大ナル確率ナ、 E_i フ出テ $n = q' + m$ steps 後ニハ
 選バレタ状態ノーツ $E_{j_s} = \text{行ク}$ 。コレヲ Lemma が証明
 サレ、同時ニ定理 IV b モ証明サレタ。

注意: 定理 IV a カラ、 $\pi_{ii}^{(n)}$ ガ $\frac{1}{M_{ii}} = \text{收斂スル (lem. II a)}$ バカリテナク E_i ト同一ノクラスニ属スル $E_j = \text{対シテ}$
 ハ $\pi_{ji}^{(n)}$ モ同一ノ極限ニ收斂スルコトガワカル。定理 IV b ニヨ
 リーツノ部ハクラスノ状態ノスベテニ関スル和 $\sum \frac{1}{M_{ii}}$ ハ $\frac{1}{2}$
 (2 ハクラスノ周期) ニ等シク、全クラスノ状態ニ関スル和
 ハ 1 ニ等シイ。

§6. 其他ノ場合ニ於ケル確率ノ漸近的行動

§2デ考察シタコトニヨリ、スベテノ n ニ就キ $P_{ij}^{(n)} = 0$ トナル状態ノ組 E_i, E_j ハ措キ、 E_j ガ非本質的デアレバ $n \rightarrow +\infty$ ノ際ニ、常ニ $P_{ij}^{(n)}$ ハ零ニ収斂スルコトヲ注意スル。更ニ、ヨリ複雑ナ場合： E_i ハ非本質的、 E_j ハ本質的デアルクラサ $S^{(\omega)}$ ニ属スル場合ヲ考ヘヨシ。非本質的状態 E_i ニ対シ、 E_i ヲ出テ遂ニハ $S^{(\omega)}$ ノアル状態ニ達スル確率ヲ $N_i^{(\omega)}$ トシヨシ。明ラカニ、クラサ $S^{(\omega)}$ ノ一ツノ状態ニ達スレバツノクラサノ場外ニ出ルコトハ不可能デアルカラ

$$\sum_i N_i^{(\omega)} \leq 1$$

デアル。最初ノ状態 E_i カラ、クラサ $S^{(\omega)}$ ニ入ル場合ニハ $S^{(\omega)}$ ノ最初ノ状態 E_j ニ達スルニ要スル Δt ノ数ヲ n_0 。コノ最初ノ状態 E_j ノ属スル部分クラサ $S_{\beta_0}^{(\omega)}$ ノ番号ヲ β_0 トスル。 $N_{i,\gamma}^{(\omega)}$ ヲ最初ノ状態 E_i カラ $n_0 \equiv \beta_0 + \gamma \pmod{d(\omega)}$ ヲ $S^{(\omega)}$ 内ニ入ル確率トシヨシ。明ラカニ

$$\sum_{\gamma=1}^{d(\omega)} N_{i,\gamma}^{(\omega)} = N_i^{(\omega)}$$

次ノ定理ガ成立スルノヲ示スコトガ出来る。

定理Ⅶ 非本質的 E_i ト部分クラサ $S_{\gamma}^{(\omega)}$ ニ属スル本質的 E_j ニ対シ、 n ガ $n \equiv \beta \pmod{d(\omega)}$ ナル値ガ $n \rightarrow +\infty$ トナル時、確率 $P_{ij}^{(n)}$ ハ $N_{i,\beta-\alpha}^{(\omega)} P_j =$ 収斂スル。

コノ様ニ固定シテ i, j ニ対シ $P_{ij}^{(n)}$ ノ n ニ対スル関係ハ (本質, 非本質ノ) スベテノ場合ヲ通シ漸近一周期的

(asymptotic-periodic) デアルコトヲ見ル。平均
 $\pi_{ij}^{(n)}$ $n \rightarrow +\infty$ ノトキ常ニ一定ノ極限 π_{ij} ヲ
 持ツテキル。