



Title	Y. C. Chow : Hilbert 及ビ Widder ノ 不等式ニ就テ (Journal London Math. Soc.2(1939), 151))
Author(s)	武隈, 良一
Citation	全国紙上数学談話会. 1940, 192, p. 33-39
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74765
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

835. Y. C. Chow:

Hilbert 及 Widder の不等式 = 就テ
(Journal London Math. Soc. 2 (1939), 151)

武隈 良一 (室蘭中學)

1. $a_n \geq 0$ ナラバ

$$(1.1) \sum_0^{\infty} \sum_0^{\infty} \frac{a_m a_n}{m+n+1} \leq \pi \sum_0^{\infty} \sum_0^{\infty} \frac{a_m a_n}{2^{m+n+1}} \frac{(m+n)!}{m! n!}$$

ナリ。コレハ Widder の不等式トシテ知ラレテ居リ、
而シテ Hilbert の不等式ヨリ Stronger ナアル
コトハ Widder ノ示シタ処デアル。Chow ハ (1.1)
ノ一般ノ形ヲ証明シテ居ル。

定理 A. $p > 1$, $p' = \frac{p}{p-1}$,

$$\mathcal{L}(x) = e^{-x} \sum_0^{\infty} a_m \frac{x^m}{m!}$$

$$\beta(x) = e^{-x} \sum_0^{\infty} b_n \frac{x^n}{n!}$$

トセバ

$$\sum_0^{\infty} \sum_0^{\infty} \frac{a_m b_n}{m+n+1} \leq \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{p}} \left(\int_0^{\infty} \alpha^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{\infty} \beta^{p'}(x) dx \right)^{\frac{1}{p'}}$$

ナリ。

又、議論ハ Hardy / 証明ノ中ニ一部分現ハレテ居ル。

$$A(x) = \sum_0^{\infty} a_m x^m, \quad A^*(x) = \sum_0^{\infty} a_m \frac{x^m}{m!}$$

$$B(x) = \sum_0^{\infty} b_n x^n, \quad B^*(x) = \sum_0^{\infty} b_n \frac{x^n}{n!}$$

ト書ケバ $A(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} A^*(xt) dt$

$$= \int_0^{\infty} e^{-\frac{u}{x}} A^*(u) du$$

$$B(x) = \frac{1}{x} \int_0^{\infty} e^{-\frac{u}{x}} B^*(u) du$$

= イテ

$$\int_0^1 A(x) B(x) dx = \int_0^1 \frac{dx}{x^2} \int_0^{\infty} e^{-\frac{u}{x}} A^*(u) du \int_0^{\infty} e^{-\frac{u}{x}} B^*(u) du$$

ナリ。今 $\frac{1}{x} = t+1$ トセキ

$$e^{-u} A^*(u) = \alpha(u), \quad e^{-u} B^*(u) = \beta(u)$$

ナルコトニ思フ致セバ

$$\begin{aligned}\int_0^1 A(x) B(x) dx &= \int_0^\infty dt \int_0^\infty e^{-tu} \alpha(u) du \int_0^\infty e^{-tu} \beta(u) du \\ &= \int_0^\infty dt \int_0^\infty e^{-tu} t^{\frac{1}{p'} - \frac{1}{p}} \alpha(u) du \int_0^\infty e^{-tu} t^{\frac{1}{p} - \frac{1}{p'}} \beta(u) du.\end{aligned}$$

71). さて

$$\begin{aligned}& \int_0^\infty e^{-tu} t^{\frac{1}{p'} - \frac{1}{p}} \alpha(u) du \\ &= \int_0^\infty \left(e^{-tu} u^{-\frac{1}{p'}} t^{-\frac{1}{p}} \alpha^p(u) \right)^{\frac{1}{p}} \left(e^{-tu} u^{-\frac{1}{p}} t^{\frac{1}{p'}} \right)^{\frac{1}{p'}} du \\ &\leq \left(\int_0^\infty e^{-tu} u^{\frac{1}{p'}} t^{-\frac{1}{p}} \alpha^p(u) du \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^\infty e^{-tu} u^{-\frac{1}{p}} t^{\frac{1}{p'}} du \right)^{\frac{1}{p'}} \\ &= \Gamma\left(\frac{1}{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_0^\infty e^{-tu} u^{\frac{1}{p'}} t^{-\frac{1}{p}} \alpha^p(u) du \right)^{\frac{1}{p}} \\ \text{同様} &= \int_0^\infty e^{-tu} t^{\frac{1}{p} - \frac{1}{p'}} \beta(u) du \\ &\leq \Gamma\left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^\infty e^{-tu} u^{\frac{1}{p}} t^{-\frac{1}{p'}} \beta^{p'}(u) du \right)^{\frac{1}{p'}}\end{aligned}$$

ニシテソレ故

$$\begin{aligned}& \int_0^1 A(x) B(x) dx \\ &\leq \Gamma\left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p}} \Gamma\left(\frac{1}{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \int_0^\infty dt \left(\int_0^\infty e^{-tu} u^{\frac{1}{p}} t^{-\frac{1}{p}} \alpha^p(u) du \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\quad \times \left(\int_0^\infty e^{-tu} u^{\frac{1}{p'}} t^{-\frac{1}{p'}} \beta^{p'}(u) du \right)^{\frac{1}{p'}} \\ &\leq \Gamma\left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p}} \Gamma\left(\frac{1}{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \left[\int_0^\infty dt \int_0^\infty e^{-tu} u^{\frac{1}{p}} t^{-\frac{1}{p}} \alpha^p(u) du \right]^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

$$\times \left[\int_0^\infty dt \int_0^\infty e^{-tu} u^{\frac{1}{p}} t^{-\frac{1}{p'}} \beta^{p'}(u) du \right]^{\frac{1}{p'}}$$

$$= \Gamma\left(\frac{1}{p}\right) \Gamma\left(\frac{1}{p'}\right) \left(\int_0^\infty \alpha^p(u) du \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^\infty \beta^{p'}(u) du \right)^{\frac{1}{p'}}$$

コレハ期待シテ居ツタ結果デアリ、而シテ Hilbert / 不等式ヨリ stronger ナルコトハ次式ヲ見レバ分ル。

$$\int_0^\infty \alpha^p(x) dx = \int_0^\infty e^{-px} \left(\sum a_m \frac{x^m}{m!} \right)^p dx$$

$$\leq \int_0^\infty e^{-px} \left(\sum a_m^p \frac{x^m}{m!} \right) \left(\sum \frac{x^m}{m!} \right)^{p-1} dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-x} \left(\sum a_m^p \frac{x^m}{m!} \right) dx = \sum a_m^p$$

以上ハ Hölder / 不等式ヨリ使用シテオラス / デ、偶然ニモ Hilbert / 不等式ヲヨリ就テ形ニ於テ稍
メカラ新シク証明シタコトニナツテ居ル。

2. 次ノ定理ハ Hilbert 及ビ Widder / 不等式
ニ關スル不等式ノ一般化サレタモノデアル。

定理 B, $a_m \geq 0$, $p_1 > 1$, $p_2 > 1$, ..., $p_m > 1$ =
シテ

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_m} = 1$$

ナラバ

$$\sum_0^\infty \sum_0^\infty \dots \sum_0^\infty \frac{a_{n_1} b_{n_2} \dots c_{n_m}}{n_1^{n_1+n_2+\dots+n_m+1}} \frac{(n_1+n_2+\dots+n_m)!}{n_1! n_2! \dots n_m!}$$

$$\leq \left(\sum a_{n_1}^{p_1} \right)^{\frac{1}{p_1}} \left(\sum b_{n_2}^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} \cdots \left(\sum c_{n_m}^{p_m} \right)^{\frac{1}{p_m}}$$

ナリ。

$$\text{今 } \alpha(x) = e^{-x} \sum_0^{\infty} a_{n_1} \frac{x^{n_1}}{n_1!} \cdots$$

トカケバ 左辺ハ

$$\int_0^{\infty} \alpha(x) \beta(x) \cdots \gamma(x) dx$$

トナル。而シテ

$$\begin{aligned} \alpha(x) &\leq \left(e^{-x} \sum a_{n_1}^{p_1} \frac{x^{n_1}}{n_1!} \right)^{\frac{1}{p_1}} \left(e^{-x} \sum \frac{x^{n_1}}{n_1!} \right)^{\frac{1}{p_1'}} \\ &= \left(e^{-x} \sum a_{n_1}^{p_1} \frac{x^{n_1}}{n_1!} \right)^{\frac{1}{p_1}} \end{aligned}$$

ナルヲ以テ

$$\begin{aligned} &\int_0^{\infty} \alpha(x) \beta(x) \cdots \gamma(x) dx \\ &\leq \int_0^{\infty} \left(e^{-x} \sum a_{n_1}^{p_1} \frac{x^{n_1}}{n_1!} \right)^{\frac{1}{p_1}} \left(e^{-x} \sum b_{n_2}^{p_2} \frac{x^{n_2}}{n_2!} \right)^{\frac{1}{p_2}} \cdots \\ &\quad \cdots \left(e^{-x} \sum c_{n_m}^{p_m} \frac{x^{n_m}}{n_m!} \right)^{\frac{1}{p_m}} dx \\ &\leq \left[\int_0^{\infty} \left(e^{-x} \sum a_{n_1}^{p_1} \frac{x^{n_1}}{n_1!} \right) dx \right]^{\frac{1}{p_1}} \left[\int_0^{\infty} \left(e^{-x} \sum b_{n_2}^{p_2} \frac{x^{n_2}}{n_2!} \right) dx \right]^{\frac{1}{p_2}} \\ &\quad \cdots \left[\int_0^{\infty} \left(e^{-x} \sum c_{n_m}^{p_m} \frac{x^{n_m}}{n_m!} \right) dx \right]^{\frac{1}{p_m}} \end{aligned}$$

$$= \left(\sum a_{n_1}^{p_1} \right)^{\frac{1}{p_1}} \left(\sum b_{n_2}^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} \cdots \left(\sum c_{n_m}^{p_m} \right)^{\frac{1}{p_m}}$$

コレ 期待セル結果ナリ。(以上, Chow, 論文ナリ)

あとがき (紹介者, 補遺)

Hilbert / 不等式ト云フ, ハ

$$\sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^N \frac{a_m a_n}{m+n+1} \leq \pi \sum_{n=0}^N a_n^2$$

デアッテ積分方程式ノ理論 研究ニ於テ, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収斂ス

レバ $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m a_n}{m+n}$ モ亦収斂スルトイフ 事実ニ基イテ居

ル / デアル。Widder ハヨリ stronger + 不等式トシ
テ次ノモノヲ 1929 年ニ発表シタ。

$$\sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^N \frac{a_m a_n}{m+n+1} \leq \pi \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^N \frac{(m+n)!}{m! n!} \frac{a_m a_n}{2^{m+n+1}}$$

Hardy ハ 同シ年ニコレヲ実解析學ノ立場カラ論ジ, 之ヲ
次ノ如ク拡張シタ。

定理

$$a_n \geq 0, A(z) = \sum a_n z^n, A^*(z) = \sum \frac{a_n z^n}{n!}$$

ナラバ

$$\int_0^1 \{A(z)\}^2 dz \leq \pi \int_0^{\infty} \{e^{-z} A^*(z)\}^2 dz$$

ナリ。茲ニ π ハ最良値ニシテ等号ハ a_n が全部零ナルトキ
ニ限ル。

定理. $p > 1$ ならば

$$\int_0^1 z^{p-2} \{A(z)\}^p dz \leq \left\{ \Gamma\left(\frac{1}{p}\right) \right\}^p \int_0^\infty z^{p-2} \{e^{-z} A^*(z)\}^p dz.$$

最後 = A. E. Ingham の 1936 年次の注意を與へて居ルコトを示し拙イペンをオクコトスル。

$$\text{定理 } a_n \geq 0, \quad 0 < \sum_0^\infty a_n^2 < \infty, \quad \lambda > 0$$

トセバ

$$\sum_{m,n=0}^\infty \frac{a_m + a_n}{m+n+\lambda} \leq M(\lambda) \sum_{n=0}^\infty a_n^2$$

ナリ。茲に

$$M(\lambda) = \frac{\pi}{\sin \lambda \pi} \quad \left(0 < \lambda \leq \frac{1}{2}\right)$$

$$M(\lambda) = M\left(\frac{1}{2}\right) = \pi \quad \left(\lambda > \frac{1}{2}\right)$$

等号ハ $0 < \lambda < \frac{1}{2}$ ノトキ成立スルが、

$0 \geq \frac{1}{2}$ ノトキ成立シナイ。