OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	Hilbert space ニ於ケル一定理
Author(s)	中野, 秀五郎
Citation	全国紙上数学談話会. 1940, 192, p. 39-42
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74766
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

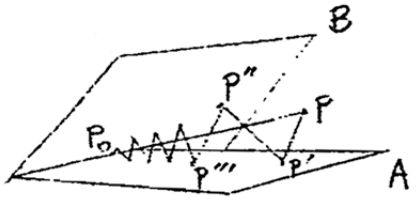
The University of Osaka

836. Hilbert space ニ於ケル一定理

中野秀五郎（東大）

三次元空間ニテ今二平面A, Bアリテ、其ノ交線ヲlトスル。Pヲユノ空間内ノ任意ノ点トスレバ、Pヨリ先ヅAヘ

ノ正射影 P' ヲ求メ、P' ヨリ B ヘノ正射影 P''、次ノデ P'' ヨリ B ヘ正射影 P''' ト、以下コノ如リニ続ケルトキハ、$P^{(n)}$ ハ P ヨリ l ヘノ正射影 P_0 ニ収斂スル。此ノ如キコトガ一般 Hilbert space ニテモ云ハレル。



$\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ ヲ Hilbert space 内ノ二ツノ closed linear manifolds トスル。又 $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ ノ共通部分即チ Durchschnitt ヲ $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$ ニテ表ハスコトニスレバ、コレモ亦 closed linear manifold ナルコトハ明カナリ。

次ニ $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ 及ビ $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$ ニ對スル Projections ヲ夫々 $P_{\mathfrak{M}}, P_{\mathfrak{N}}, P_{\mathfrak{M}\mathfrak{N}}$ ニテ表ハスコトニスレバ、次ノ定理成立ス。

定理. $$P_{\mathfrak{M}\mathfrak{N}} = \lim_{n\to\infty} (P_{\mathfrak{M}} P_{\mathfrak{N}})^n = \lim_{n\to\infty} (P_{\mathfrak{N}} P_{\mathfrak{M}})^n$$

証明. $H = P_{\mathfrak{N}} P_{\mathfrak{M}} P_{\mathfrak{N}}$ ト置ケバ、H ハ明カニ bounded Hermitean デアル。然カモ、任意ノ element f ニ對シ

$$(Hf, f) = (P_{\mathfrak{N}} P_{\mathfrak{M}} P_{\mathfrak{N}} f, f) = \| P_{\mathfrak{M}} P_{\mathfrak{N}} f \|^2 \geqq 0$$

$$\| Hf \| \leqq \| f \|$$

ナルヲ以テ、H ノ spectralization ハ

$$H = \int_0^1 \lambda \, dE(\lambda)$$

ナル形ニテ與ヘラレル。故ニ

$$H^n = \int_0^1 \lambda^n dE(\lambda)$$

従ッテ

$$\lim_{n\to\infty} H^n = E(L)$$

$E(L)$ ハ $Hf = f$ ナル総テノ f ヨリナル closed linear manifold ノ Projection ナリ。然ルニ $Hf = f$ ナル f ハ $P_{\mu\nu}P_{\nu\mu}P_{\mu\nu}f = f$. 従ッテ

$$\|P_{\mu\nu}P_{\nu\mu}P_{\mu\nu}f\| = \|P_{\nu\mu}P_{\mu\nu}f\| = \|P_{\mu\nu}f\| = \|f\|$$

トナルヲ以テ

$$P_{\mu\nu}P_{\nu\mu}P_{\mu\nu}f = P_{\nu\mu}P_{\mu\nu}f = P_{\mu\nu}f = f$$

即チ $P_{\mu\nu}f = P_{\nu\mu}f = f$ ナルガ如キ f ナリ。故ニ

$$E(L) = P_{\nu\mu}$$

ナリ。従ッテ

$$P_{\nu\mu} = \lim_{n\to\infty} H^n = \lim_{n\to\infty} P_{\mu\nu}(P_{\nu\mu}P_{\mu\nu})^n$$

$$P_{\nu\mu\nu} = P_{\nu\mu}P_{\nu\mu\nu} = \lim_{n\to\infty}(P_{\nu\mu}P_{\mu\nu})^{n+1}$$

同様ニ

$$P_{\nu\mu\nu} = \lim_{n\to\infty}(P_{\mu\nu}P_{\nu\mu})^{n+1}$$

ヲ得ル。

以上ノ如ク H ノ spectralization ヲ用フルトキハ簡単ニ証明サレルモ、spectralization ヲ用ヒザル elementary ナ証明ハ未ダ私ニハ得ラレテナイ。

何ントカ elementary ニ証明出来ナイモノカシラ？

証明：　第190号 "Covering theorem ニ就テ" 内ノ補定理、有界点集合Aアリテ、其ノ各点ニ其ノ合点ヲ含ム正方形ガ……ノ所ヲ含ム ヲ中心トスルニ変ヘル。若シ此処ヲコノマヽ単ニ含ム トスレバ、三倍ヲ（3＋ε）倍ト置換ヘレバ可ナリ。此処ニεハ任意ノ正数トス。