



Title	Strong law of numbers 二就テ
Author(s)	河田, 龍夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1940, 192, p. 46-51
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74770
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

840. Strong law of numbers = 就テ

河田 龍夫(東北大)

1. $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 互=独立 + chance variables, sequence トスル. expectation $E(X_n) = 0$ トスル.

$$(1) \frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

1 zero = 収斂スル probability が 1 + 0 トキ考へ
ル sequence へ strong law of large numbers
(S. l. l. n) = 従フ ト云ハレル。通常 1 law of large
numbers ト云フノハ S_n/n が 0 = convergent in
prob. + 0 トデアル。

$\{X_n\}$ が S. l. l. n = 従フ タメノ 充分条件ハ Kolmogoroff,
(Compt. Rendus 191 (1930)), Marcinkiewicz-
Ljygmund (Fund. Math. 27), Halmos

(Annals. Math. 40 (1939)). Birkbaum-Schreier
(Studia Math. 3) 等が導へられたキル。

サテ Chance variables, series $\sum x_i =$ 確
率ハソノ convergence in prob. ト almost surely
conv. (conv. スル prob. か 1) トハ同等デアル、ト
ハヨク知ラレタ Lévy ノ定理デアル。併シ (1) , 0 へノ
conv. = 就イテハソノ conv. in prob. ト alm. sure
conv. トハ必ズシモ一致シイ。従ツテコノ場合 conv.
in prob. カラ alm. sure conv. が出テアルノニハ
ドンナコトが要ルカトイフコトヲ考、テ見タイ。延イテハソ
レカラ (1) が S. L. L. n = 従ヲタメノ既知ノ充分條件が得
ラレ、バ面白イワケデス。

上ノ Lévy ノ定理ハ G. Ottaviani = ヨツテ極メ
テ簡單ノ証明が導へラレタ。(吉田耕作氏ノ紹介が全、紙、談。
ノ 188 号ニアル)。ソレト全ク同ジ論理ヲ述ツテ吾々ノ目
的ヲ達スルコトが出来ル事ヲ述ベテ見マス。

2. prob. ノ Lebesgue measure ノ言葉ヲ
マツテ見マス。

$$X_1(t), X_2(t), \dots$$

ヲ independent funct. ノ sequence トスル。其ノ
= 對シテ (1) が conv. in measure to zero トスル。
即チ given $\varepsilon > 0$ = 對シテ

$$(2) \quad m \left(\frac{\varepsilon n}{4} > S_n > \frac{-\varepsilon n}{4} \right) > 1 - \delta_n$$

$\exists = n \rightarrow \infty$, $\exists \delta_n \rightarrow 0$ (fixed $\varepsilon > 0$). $S_m(t) > \varepsilon m$,

$$\sum_{i=n+1}^{2n} X_i(t) > -\frac{\varepsilon n}{2} \text{ かつ } S_{2n}(t) > \varepsilon \left(m - \frac{n}{2}\right) \geq \frac{\varepsilon n}{2}$$

(但し $m \geq n$ かつ), 故 =

$$(2) \sum_{m=n}^{2n} \prod_{i=n}^{m-1} E(S_i(t) \leq \varepsilon i) \cdot E(S_m(t) > \varepsilon m) \cdot E\left(\sum_{i=m+1}^{2n} X_i(t) > -\frac{\varepsilon n}{2}\right) \subset E\left(S_{2n}(t) \geq \frac{\varepsilon n}{2}\right)$$

左辺 / $\sum$ / 中 / $\prod$ で $m=n$ / かつ $S_n(t) > \varepsilon n + 1$ set 7 表ハス。

$$\frac{\varepsilon n}{4} > S_{2n} > -\frac{\varepsilon n}{4}, \frac{\varepsilon m}{4} > S_m > -\frac{\varepsilon m}{4} \text{ かつ}$$

$$S_{2n} - S_m > -\frac{\varepsilon}{4} (n+m) \geq -\frac{\varepsilon n}{2}.$$

$$\text{故} = E\left(\sum_{i=m+1}^{2n} X_i(t) > -\frac{\varepsilon n}{2}\right) \supset E\left(\frac{\varepsilon n}{4} > S_{2n} > -\frac{\varepsilon n}{4}\right) \cdot E\left(\frac{\varepsilon m}{4} > S_m > -\frac{\varepsilon m}{4}\right)$$

最後 / product / set / measure $\wedge 1 - \delta_{2n} - \delta_m$ 7 越エ + 1。

$$\max_{n \leq r \leq 2n} \delta_r = \eta_{2n} \text{ かつ } 1 - \delta_{2n} - \delta_m \geq 1 - 2\eta_{2n}$$

47 independence カラ

$$(1 - 2\eta_{2n}) m \left\{ \sum_{m=n}^{2n} \prod_{i=n}^{m-1} E(S_i(t) \leq \varepsilon i) \cdot E(S_m(t) > \varepsilon m) \right\} \\ \leq m E\left(S_{2n}(t) \geq \frac{\varepsilon n}{2}\right)$$

左辺 / $\{ \}$ / 中 / 少クト E ーツ / i ($n \leq i \leq 2n$) = 48
シテ $\varepsilon_i(t) > \varepsilon i$ かつ 如キ set デ 7 11。

之ヲ $e_n(\varepsilon)$ トスレバ

$$(1-2\eta_{2n})m e_n(\varepsilon) \leq m E(S_{2n}(t) > \frac{\varepsilon n}{2})$$

$$\text{同様} = (1-2\eta_{2n})m e'_n(\varepsilon) \leq m E(S_{2n}(t) < -\frac{\varepsilon n}{2})$$

但シ $e'_n(\varepsilon)$ ハ少クトモ一ツノ $i (n \leq i \leq 2n)$ = 對シテ

$S_i(t) < -\varepsilon i + \nu \Delta t$ デアル。故ニ $n \leq i \leq 2n + \nu$ ス

ベテ i = 對シテ $|S_i(t)| < \varepsilon i + \nu \Delta t$ ナラバ $E_n(\varepsilon)$ ト

スレバ

$$m E_n(\varepsilon) = 1 - m(e_n(\varepsilon) + e'_n(\varepsilon))$$

$$= 1 - m e_n(\varepsilon) - m e'_n(\varepsilon)$$

$$\geq 1 - \frac{1}{1-2\eta_n} (m E(S_{2n} > \frac{\varepsilon n}{2}) + m E(S_{2n} < -\frac{\varepsilon n}{2}))$$

$$\geq 1 - \frac{\delta_{2n}}{1-2\eta_{2n}} \geq 1 - \frac{\eta_{2n}}{1-2\eta_{2n}}$$

$n \rightarrow \infty$ ノトキ $\eta_{2n} \rightarrow 0$ ナル故ニ

$$m E_n(\varepsilon) \geq 1 - \theta \eta_{2n}$$

ガ $n \geq n_0$ ナル成立スル θ ハ n = 無関係ノ常数デアアル。即チ

$n \geq n_0$ デスベテノ $i (n \leq i \leq 2n)$ = 對シテ $|S_i(t)| > \varepsilon i$

ナル Δt ノ measure ハ $\theta \eta_{2n}$ ナリトイフ。

今 $2^{k_0} \geq n_0$ ナル如ク k_0 ナリトシ $2^{k_0}, 2^{k_0+1}, \dots$ ト
スルコトニヨリ $|S_i(t)| \geq \varepsilon i$ ガ $i \geq 2^{k_0}$ ナルスベテノ i

= 對シテ成立スル如ク Δt ノ measure ハ $a \sum_{i=2^{k_0}}^{\infty} \eta_{2^i}$ ナリ

小デアアル。

今 $\sum \eta_{2^i} < \infty$ ナル如ク η_n 從ツテ δ_n ガ條件附ケラレ

テキタトスレバ是レヨリ殆ンドスベテノ点デ $\frac{S_n(t)}{n} \rightarrow 0$ が
得ラレルコトハ明カデアラウ。依ツテ次ノ定理ヲ得ル。

$$\boxed{\text{定理}} \quad mE\left(\varepsilon > \frac{S_n}{n} > -\varepsilon_n\right) > 1 - \delta_n \text{ トシ } \delta_n = \delta_n(\varepsilon)$$

が次ノ條件ヲ満足シタトスル。

$$\max_{2^{k-1} < n \leq 2^k} \delta_n = \eta_k \text{ トシタトキ } \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k < \infty$$

而ルトキハ $\frac{S_n(t)}{n}$ ハ殆ンドスベテノ点デ $0 = \text{conv.}$ ス
ル。

3. 上ノ定理ヲ用ヒテ Kolmogoroffノ定理ヲ出シ
テ見ル。

Kolmogoroffノ定理: X_n^2 ノmeasureヲ $E(X_n^2)$
 $= b_n$ トスルトキ、モシ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^2} < \infty$$

ナラバ $\{X_i\}$ ハ s. l. l. n = 従フ。

コノ種ノ定理ハ $E(X_n)$ 、 $E(X_n^2)$ ノ存在シトイ場合 =
モ Khintchine-Kolmogoroffノ equivalent
methodヲ用フレバ容易ニ拡張出来ル。今ソレニ触レズ上
述ノ形ヲ考ヘル。

$$E(S_n^2) = \sum_{i=1}^n b_i \text{ ナル故ニ } = \text{Chebycheffノ不等}$$

式カラ

$$(2) \quad m E(|S_n| \geq nR) \leq \frac{1}{n^2 R^2} \sum_{i=1}^n b_i.$$

$$\begin{aligned} \text{故} = \quad \eta_K &= \max_{2^{K-1} < n \leq 2^K} \delta_n = \max_{2^{K-1} < n \leq 2^K} \frac{1}{n^2 \varepsilon^2} \sum_{i=1}^n b_i \\ &\leq \frac{4}{\varepsilon^2} \frac{1}{2^{2K}} \sum_{i=1}^{2^K} b_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{故} = \quad \sum_1^\infty \eta_K &\leq \frac{4}{\varepsilon^2} \sum_{K=1}^\infty \frac{1}{2^{2K}} \sum_{i=1}^{2^K} b_i \\ &\leq \frac{4}{\varepsilon^2} \sum_{K=1}^\infty \sum_{m=K}^\infty \left(\frac{1}{2^m}\right)^2 \cdot \sum_{i=2^{K+1}}^{2^{K+1}} b_i \\ &\leq \frac{4}{\varepsilon^2} \sum_{K=1}^\infty \left(\frac{1}{2^{K-1}}\right)^2 \sum_{i=2^{K+1}}^{2^{K+1}} b_i \leq \frac{32}{\varepsilon^2} \sum_1^\infty \frac{b_n}{n^2} \end{aligned}$$

故 = Kolmogoroff の定理が証明サレタ。

注意. Kolmogoroff の (2) の不等式, 代り = Kolmogoroff 自身,

$$(3) \quad m E\left(\max_{1 \leq \nu \leq n} |S_\nu| \geq nR\right) \leq \frac{1}{n^2 R^2} \sum_{i=1}^n b_i.$$

ヲ用ヒテ 同様ニ証明シタ (2) ト (3) トヲ比較スルト (3) ノ方が遙カニ 六ヶ 敷イ。吾々ノ 場合ニハ §2 ノ定理ヲ用ヒレバ (3) ヲ用ヒズニ (2) デ 充分ナルコトヲ示シテ 可ル。