



Title	Fourier 級數ノ強總和法ニ関スル注意
Author(s)	河田, 龍夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1940, 193, p. 52-58
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74771
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

841. Fourier 級数ノ強総和法ニ関スル. 注意

河田 龍夫 (東北大)

I. 先日数物會誌 = Fourier 級数論 (II) トシテソノ
strong summability = 関スル最近ノ研究ノ報告ヲ
試ミマシタガソノ中デ頁數ノ都合ニヨリ省イタノニ Salem
ノ研究ガアリマス。

可積分函数 $f(x)$ ノ Fourier 級数ノ部分和ヲ $S_n(x)$
トシ、ソノ算術平均ヲ $\sigma_n(x)$ トシマス。吾々ノ問題ニスル
ノハ

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|S_n(x) - \sigma_n(x)|^K}{n} \quad K > 0$$

ノ almost everywhere convergence デアリマス。

實ハ $K=2$ デ $f(x) \in L_p (p > 1)$ ノトキハ既ニ非常ニ良
イ結果ガ Zygmund ニ依ツテ得レテキマス。(Fund.
math. 30) 而シ $K \neq 2$ 又 $f \in L_1$ ノトキハ餘リ結果ガ
アリマセンノデ、コレニ就イテ泉信一博士及ビ小生ガ結果ヲ
出シテミマシタ。(数物會誌参照)

R. Salem ノ研究トイフノハ (1) トヨク似タ級数
($K=1$) ヲ考ヘテ、ソノ almost everywhere conv.
ヲ f ノ mean modulus of continuity ヲリ出サ
ウトスルノデス 随ツテ $f \in L_1$ シカ假定シナイ所ガ興味ア
ルト思ヒマス。詳シク云フト

定理1 (Salem) $f(x) \in L_1, \bar{f}^0$

$$(2) \quad \omega(\delta) = \max_{0 < h \leq \delta} \int_0^{2\pi} |f(x+h) - f(x)| dx$$

ト置クトキモシ

$$(3) \quad \omega(\delta) = O\left(\frac{1}{|\log \delta|^{1+\varepsilon}}\right) \quad \varepsilon > 0$$

ナラバ

$$(4) \quad \sum \frac{|S_n(x) - \theta_n(x)|}{n}$$

が alm. ev. conv. ナラバ、コトハ

$$(5) \quad \theta_n(x) = \frac{1}{2} \left[S_n\left(x + \frac{\pi}{2n}\right) + S_n\left(x - \frac{\pi}{2n}\right) \right]$$

Salemハ是ヲ証明スルニ、次、Kolmogoroffノ定理ヲ用ヒマシタ。 $0 < p < 1$ ナラバ

$$(6) \quad \int_0^{2\pi} |S_n(x)|^p dx \leq \frac{A}{\cos \frac{p\pi}{2}} \left[\int_0^{2\pi} |f(x)| dx \right]^p$$

2. 先ツ筆者ノ注意シタイコトハ定理ノ証明 = (6)ノ代リ
=

$$(7) \quad \int_0^{2\pi} \frac{|S_n(x)|}{\log^{1+\varepsilon}(2+|S_n(x)|)} dx \leq A \int_0^{2\pi} |f(x)| dx, \quad \varepsilon > 0$$

コトハ $A, \varepsilon = 1$ ニ depend スル。

ヲ用レタ方が少シ便利ナトイフコトマス。之レハ筆者ガ前ニ証明シタ定理デ、conjugate functionニ関スル Jitch-

marsh, 基本的ナ定理, 直接, 結果マス。

實際 (11) を使ッテ定理ヲ証明シテ見マス。(考ヘハ Salem
ノ考ヘマス)

(11) = ヨリ

$$\begin{aligned}
 (8) \quad & \int_0^{2\pi} \frac{|S_n(x) - \theta_n(x)|}{\log^{1+\eta}(2+|S_n(x) - \theta_n(x)|)} dx \\
 & \leq A \int_0^{2\pi} \left| f(x) - \frac{1}{2} f\left(x + \frac{\pi}{2n}\right) - \frac{1}{2} f\left(x - \frac{\pi}{2n}\right) \right| dx \\
 & \leq A \omega\left(\frac{\pi}{2n}\right) \leq A \omega\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{A}{\log n^{1+\varepsilon}}
 \end{aligned}$$

両辺ヲ λ_n ヲ"ワ"ッテ Sum up スルベ

$$\begin{aligned}
 (9) \quad & \int_0^{2\pi} \sum \frac{|S_n(x) - \theta_n(x)|}{\lambda_n \log^{1+\eta}(2+|S_n(x) - \theta_n(x)|)} dx \\
 & \leq A \sum \frac{1}{\lambda_n \log n^{1+\varepsilon}}
 \end{aligned}$$

コノ右辺ガ conv. + ラベ,

$$\sum \frac{|S_n(x) - \theta_n(x)|}{\lambda_n \log^{1+\eta}(2+|S_n(x) - \theta_n(x)|)}$$

ガ alm. ev. conv. シマス。

$$\lambda_n = \frac{n}{(\log \log n)^{1+\eta}} \quad \text{トスルベ明カニ (11)ノ右辺ガ}$$

conv. スルカラ

$$(9). \quad \infty > \sum \frac{|S_n(x) - \theta_n(x)|}{n \log^{1+\eta}(2+|S_n(x) - \theta_n(x)|)} (\log \log n)^{1+\eta}$$

が alm. ev. 成立スル. $S_n(x) - \theta_n(x) = O(\log n)$ が
殆んどスベテノ点で成立スルカラ (well known)

$$(10) \quad \infty > \sum \frac{|S_n(x) - \theta_n(x)|}{n}, \quad \text{alm. ev.}$$

是ヲ証明スリ。

3. 上ノ定理ヲ (4) ノ代リニ (1) ($K=1$) ヲ考ヘレバド
ウオト云ヒマスト是レニ對シテモ全ク同様ノ事實が成立スル
事が判リマス。

定理 2. f が可積分デ $\omega(\delta) = O\left(\frac{1}{(\log \delta)^{1+\varepsilon}}\right)$, ($\varepsilon > 0$)

ナラバ (1) ($K=1$) が alm. ev. conv. スル,

コノ証明ノタメニ次ノ補助定理ヲ要シマス。

補助定理 1. $\omega(t) = O\left(\frac{1}{|\log t|^K}\right)$ for small t ナ

ラバソノ Fejér 積分ニ就テ

$$(11) \quad I_n = \frac{1}{n\pi} \int_0^\pi \omega(t) \frac{\sin^2(n + \frac{1}{2})t}{\sin^2 \frac{t}{2}} dt = O\left(\frac{1}{(\log n)^K}\right)$$

が成立スル。

是レハ known デス. (Izumi-Kawata, Notes on
Fourier series V, 東北数學雜誌)

是レヲ使フト定理 2 が容易ニ証明サレマス。

$f(x) - \sigma_n(x)$ ノ部分和ハ $S_n(x) - \sigma_n(x)$ デスカラ (7) ヲ

用ヒテ

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi} \frac{|S_n(x) - \sigma_n(x)|}{\log^{1+\eta}(2+|S_n(x) - \sigma_n(x)|)} dx \leq A \int_0^{2\pi} |f(x) - \sigma_n(x)| dx \\
& \leq A \int_0^{2\pi} dx \int_0^\pi \left| f(x+t) + f(x-t) - 2f(x) \right| \frac{\sin^2(n+\frac{1}{2})t}{nt^2} dt \\
& \leq A \int_0^\pi \frac{\sin^2(n+\frac{1}{2})t}{nt^2} dt - \int_0^{2\pi} |f(x+t) - f(x)| dx
\end{aligned}$$

補助定理ト假定 = ヲリ

$$(12) \quad \int_0^{2\pi} \frac{|S_n(x) - \sigma_n(x)|}{\log^{1+\eta}(2+|S_n(x) - \sigma_n(x)|)} dx \leq \frac{A}{(\log n)^{1+\varepsilon}}$$

両辺ヲ $\frac{n}{(\log \log n)^{1+\eta}}$ デ割ツテ前ト同シ論法ヲ繰返セバヨイ。

4. 全ク同様ニシテ

定理 3. $f(x) \in L_1$, $\omega(\delta) = O\left(\frac{1}{(\log \log \delta)^{2+\varepsilon}}\right)$,

$\varepsilon < 0$

ナラバ殆ドスベテノ点デ

$$(13) \quad \sum \frac{|S_n(x) - \sigma_n(x)|}{n \log n}$$

ガ conv スル。

コノトキハ補助定理 1ノ代リ =

補助定理 2. $\omega(t) = O\left(\frac{1}{|\log \log t|^{2+\varepsilon}}\right)$ ナラバ $\omega(t)$

Fejér 積分ガ $O\left(\frac{1}{(\log \log n)^{2+\varepsilon}}\right) = +\infty$ 。

ヲ用ヒマス、(7) < 2 トシテオイテカラ定理 1, 2 ト同ジ論法ヲ繰返ス)

コノ補助定理ハ補助定理 1 ト同ジ様ニシテ証明出來マス。

5. (12) = correspond スル不等式ヲ色々ノ數デ割ツテ種々ノ定理が得ラレマス。

6. 上ノ analysis ハ次ノ定理ヲ suggest シマス、實際全く同様ノ論法デ出來マス、(7) ノ代リ = 通常ニ u . Riesz ノ定理ヲ用ヒマス。

定理 4. $f \in L_p$ ($p > 1$) ナリ且ツ

$$(14) \quad \omega_p(\delta) = \max_{0 < h \leq \delta} \int_0^{2\pi} |f(x+t) - f(x)|^p dx$$

ト置クトキ、モシ $\omega_p(\delta) = O\left(\frac{1}{|\log \delta|^{1+\varepsilon}}\right)$, $\varepsilon > 0$ ナラバ

$$(15) \quad \sum \frac{|S_n(x) - \sigma_n(x)|^p}{n}$$

が $alm. ev. conv.$ スル。

是レハ上ノ論法ト同ジニ出來ルノデスカラ analysis ハ簡單デスカ $p \neq 2$ ノ場合ノ條件ヲ與ヘテ キル点面白クナイコトモナイト思ヒマス、但シ $p = 2$ ノトキハ mean modulus of continuity = 關スル條件が全然ナクトモ終結ハ成立シマス。(Zygmund)

随ツテ吾々、場合ニモ $\omega_p(\delta)$ = 關スル條件ガトレル可能性ガアル歟デスカ、コレハ非常ニ六ヶ敷イ問題ト思ヒマス。

色々考へて見てもルノデスが出来マセン。