



Title	An ergodic theorem of Birkhoff - Khintchine type
Author(s)	吉田, 耕作
Citation	全国紙上数学談話会. 1940, 193, p. 64-68
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74774
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

844. An ergodic theorem of Birkhoff-Khintchine type.

吉田 耕作 (阪大)

$(0, 1)$ で可積分な函数 $f(t)$ が norm

$$\|f\| = \int_0^1 |f(t)| dt \text{ を作る Banach 空間 } L, (L),$$

(L) 内へノ線形寫像 T が

$$(1) \|T^n\| \leq \text{常数 } C \quad (n = 1, 2, \dots)$$

ヲ満足スルトスル. $T^n f = f^{(n)}$ ト置ク.

定理

$$\begin{aligned} 2 \left\{ \begin{aligned} &\text{A} \neq 1, f \in (L) = \text{對 } i, \text{ almost everywhere} = \\ &-\infty < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n f^{(m)}(t) \\ &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n f^{(m)}(t) < +\infty \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

ト假定スルナラバ, 與ヘラレタ $g \in (L) = \text{對シ}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n g^{(m)}(t) \text{ exist almost everywhere}$$

ナレタメノ必要條件ハ

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} g^{(n)}(t) = 0 \text{ almost everywhere}$$

$$(4) \left\{ \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n g^{(m)} \right\} \text{ が weakly compact}$$

ノ二ツが成立ツコトデアル。

証明 必要ハ明カデアアルカラ, 充分ヲ証明スル。

先ツ (1), (4) ヲ使ヘバ mean ergodic theorem

$$= \exists \text{リ } n \rightarrow \infty \text{ ナレトキ } \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n g^{(m)} \rightarrow g^* \in (L) \text{ strongly}$$

且ツ $T \cdot g^* = g^*$. 故ニ $g = g^* + (g - g^*)$ ト置イテ

$$\frac{1}{n} \sum_{m=1}^n g^{(m)} = g^* + \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n (g - g^*)^{(m)}. \text{ 此, 右辺, 第二}$$

項 $\rightarrow 0$ almost everywhere ガ云ヘルトヨイ. 所
ガ定義カラ $g - g^*$ ハ

$$(5) (E - T) \frac{ng + (n-1)T \cdot g + \dots + T^n g}{n} \quad (E \text{ ハ 單位寫像})$$

ノ strong limit. 今各 $f \in (L) = \text{對シ}$

$$\widetilde{f}(t) = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n f^{(m)}(t)} - \underline{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n f^{(m)}(t)}$$

ヲ對應サセル寫像ヲ考ヘル. (2) = ヨリ $\widetilde{f}$ ハ殆ド到ル所有

限且ツ可測ナル。即チ $\widehat{f}$ ハ殆ンド到ル所有限且ツ可測ナ

函数 $h(t)$ へ $\text{norm} \|h\| = \int_0^1 \frac{|h(t)|}{1+|h(t)|} dt$ デ作ル

F-type space $(S) =$ 属スル。

Banach-Saks ノ定理ヲ使ヘバ (L) ノ (S) 内ヘ
ノ寫像 $f \rightarrow \widetilde{f} = \widetilde{T} f$ ハ連續ナル。⁽¹⁾ 然ルニ (3) =
ヨリ (5) = 於テハ $\widetilde{T}$ ハ零 (almost everywhere zero)
ニナレコトガワカルカラ, (5) ノ limit ナル所, $(g - g^*)$
= 於テモ $\widetilde{T}$ ハ零トナル。 — 以上 —

注意 G. D. Birkhoff ノ ergodic theorem
ハ T が *ergodic measure* ナる變換ニヨツテ induce サレ
タ線型寫像ノ場合ナル。コノトキ (2) ノ満足サレラルコト
ハ, N. Wiener ノ dominated ergodic theorem
ノ主張スル所ナル。⁽²⁾ (3) が全テノ $g \in (L) =$ 對シテ成立
ツコトモ $\int_0^1 |g(t)| dt < +\infty$ カラ容易ニ証明デキル (之ハ
角谷氏が考ヘテ果セラレタ。今ハ略ス)。 (4) ハ Lebesgue
ノ定理カラ全テノ $g \in (L) =$ 對シ満足サレラルコトガワカル。
斯ウヤツテ Birkhoff ergodic theorem ノ別証明
(operator theoretical テ) が出來タトモ云ヘル所ナル。

(1) Category 論法デタヌスク証明デキル。例ヘバ S. Mazur-
W. Orlicz: über Folgen linearer Operationen,
Studia Math. 4 (1933) 7 ミラレタイ。

(2) Duke Math. J. 5, 1 (1939)

尤も Wiener 自身が d. E. T. と M. E. T. から B. E. T. が出セルコトヲ既ニ証明シテアルノデアツテ、上ノヤリ方ハ Wiener ノヨリ巧イトハ云ヘナイ。大体 *equi-measure* 点交換ノ場合デアレバ、既ニ筆者ト角谷氏トガ d. E. T. ト B. E. T. トヲ同時ニ証明スルコトが出来ルコトヲ示シテアルノデアル。⁽¹⁾

定理 ハ *equi-measure* 点交換ニ限ラズ一般ノ 線型寫像 = apply デキルノミナラズ、コノトキニモ d. E. T. 型ノ條件 (2) が *essential* = 利イテ來ルコトが示サレタ訣デアル。

尚 individual 点 g (of (L)) テ individual ergodic theorem (B. E. T.) が成立ツカドウカノ議論ニモツテクルコトが出来タ点ニ注意シテヲキタイ。

應用 モシモ

(6) 各 $g \in (L)$ = 對シ $|g^{(m)}(t)| \leq \bar{g}(t)$ ($m = 1, 2, \dots$) + 如キ $\bar{g} \in (L)$ ノ存在ヲ假定スレバ (1), (2), (3), (4)ノ満足サレラルコトハ明カデアアル。G. Birkhoff ハ、抽象的 + formulation デ、(6) = 相當スルコトヲ假定シテ

$$\frac{1}{n} \sum_{m=1}^n g^{(m)}$$

weak + 収斂ヲ証明シタ。⁽²⁾ 尤も weak + limit がア

(1) 本紙談話 784

(2) Proc. Nat. Acad. Sc. 1938: dependent probability and (L) space.

ルカドウカモ *Birkhoff* の証明シテナイ。彼、 $\times$ ヲタコ
トが具体的 = (L) デ (6) の場合ヲ $\times$ ヲタコト = ナルコトヲ

示シ且ツ $\frac{1}{n} \sum_{m=1}^n g^{(m)}$, strong = 収斂スルコトヲ示シタ

1 が角谷氏デアル。⁽¹⁾ 定理 = ヨレバ、モット強ク almost everywhere 収斂ガ出ル訳デアル。尚他ニ應用デキ相デ
アルケレドモ又、機會 = エザル。

(1) 位相数学, 第2巻第一号: 抽象(L) 空間ノ表現。