OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	An ergodic theorem of Birkhoff - Khintchine type
Author(s)	吉田, 耕作
Citation	全国紙上数学談話会. 1940, 193, p. 64-68
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74774
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

844. An ergodic theorem of Birkhoff-Khintchine type.

吉田 耕作 (阪大)

$(0,1)$ デ可積分ナ函数 $f(t)$ ガ norm

$\|f\| = \int_0^1 |f(t)|\,dt$ ヲ作ル Banach 空間ヲ (L), (L) ノ (L) 内ヘノ線形写像 T ガ

(1) $\|T^n\| \leqq$ 常数 C $\quad (n = 1, 2, \cdots\cdots)$

ヲ満足スルトスル. $T^n f = f^{(n)}$ ト置ク.

定理

2 { 全テノ $f \in (L)$ ニ対シ, almost everywhere ニ

$$-\infty < \varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} f^{(m)}(t)$$

$$\leqq \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} f^{(m)}(t) < +\infty$$

ト假定スルナラバ，與ヘラレタ $g\in(L)$ ニ對シ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}g^{(m)}(t)\quad \text{exist almost everywhere}$$

ナルタメノ必充條件ハ

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}g^{(n)}(t)=0$ almost everywhere

(4) $\left\{\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}g^{(m)}\right\}$ が weakly compact

ノ二ツガ成立ツコトデアル。

証明 必要ハ明カデアルカラ，充分ヲ証明スル。

先ヅ (1), (4) ヲ使ヘバ mean ergodic theorem ニヨリ $n\to\infty$ ナルトキ $\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}g^{(m)}\to g^{*}\in(L)$ strongly 且ツ $T\cdot g^{*}=g^{*}$. 故ニ $g=g^{*}+(g-g^{*})$ ト置イテ

$\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}g^{(m)}=g^{*}+\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}(g-g^{*})^{(m)}$. 此ノ右辺ノ第二項 $\to 0$ almost everywhere ガ云ヘルトヨイ. 所ガ定義カラ $g-g^{*}$ ハ

(5) $(E-T)\dfrac{ng+(n-1)T\cdot g+\cdots\cdots+T^{n}g}{n}$ （E ヘ單位寫像）

ノ strong limit. 今各 $f\in(L)$ ニ對シ

$$\tilde{f}(t)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}f^{(m)}(t)-\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}f^{(m)}(t)$$

ヲ對應サセル寫像ヲ考ヘル. (2) ニヨリ $\tilde{f}$ ハ始ド到ル所有

限且ツ可測デアル。即チ $\tilde{f}$ ハ殆ンド到ル所有限且ツ可測ナ函數 $h(t)$ が norm $\|h\| = \int_0^1 \frac{|h(t)|}{1+|h(t)|}dt$ デ作ル F-type ノ space (S) ニ屬スル.

Banach-Saks ノ定理ヲ使ヘバ (L) ノ (S) 内ヘノ寫像 $f \to \tilde{f} = \tilde{T}$ f ハ連續デアル。(1) 然ルニ (3) ニヨリ (5) ニ於テハ $\tilde{T}$ ハ零 (almost everywhere zero) ニナルコトガワカルカラ, (5) ノ limit デアル所ノ $(g-g^*)$ ニ於テモ $\tilde{T}$ ハ零トナル。 — 以上 —

注意 G. D. Birkhoff ノ ergodic theorem ハ T ガ equi-measure ナ点変換ニヨッテ induce サレタ線型寫像ノ場合デアル。コノトキ (2) ノ滿足サレラルコトハ, N. Wiener ノ dominated ergodic theorem ノ主張スル所デアル。(2) (3) ガ全テノ $g \in (L)$ ニ對シテ成立ッコトモ $\int_0^1 |g(t)|dt < +\infty$ カラ容易ニ証明デキル (之ハ角谷氏ガ考ヘテ呉レラレタ. 今ハ略ス). (4) ハ Lebesgue ノ定理カラ全テノ $g \in (L)$ ニ對シ滿足サレラルコトガワカル。斯ウヌッテ Birkhoff ergodic theorem ノ別証明 (operator theoretical テ) ガ出來タトモ云ヘル訳デアル。

---

(1) Category 論法デタヌスク証明デキル. 例ヘバ S. Mazur-W. Orlicz: Über Folgen linearer Operationen, Studia Math. 4 (1933) ヲミラレタイ.

(2) Duke Math. J. 5, 1 (1939)

尤モ Wiener 自身が d E.T トM E.T カラ B.E.T が出セルコトヲ既ニ証明シテヲルノデアッテ，上ノヤリ方ハ Wiener ノヨリ巧イトハ云ヘナイ。大体 equi-measure 点変換ノ場合デアレバ，既ニ掌着ト角谷氏トが d.E.T トB.E.T. トヲ同時ニ証明スルコトが出来ルコトヲ示シテアルノデアル。(1)

定理 ハ equi-measure 点変換ニ限ラズ一般ノ線型寫像ニ apply デキルノミナラズ、コノトキニモ d.E.T. 型ノ條件(2)が essential ニ利イテ来ルコトが示サレタ訳デアル。

尚 individual ナ点 $g(\text{of } (L))$ デ individual ergodic theorem (B.E.T.) が成立ツカドウカノ議論ニモッテクルコトが出来タ点モ注意シテヲキタイ。

応用 モシモ

(6) 各 $g \in (L)$ ニ對シ $|g^{(m)}(t)| \leqq \bar{g}(t)$ $(m=1,2,\cdots)$ ナル如キ $\bar{g} \in (L)$ ノ存在ヲ假定スレバ (1), (2), (3), (4) ノ満足サレラルコトハ明カデアル。G. Birkhoff ハ，抽象的ナ formulation デ，(6) ニ相當スルコトヲ假定シテ

$$\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} g^{(m)}$$

weak ナ収斂ヲ証明シタ。(2) 尤モ weak ナ limit ガア

---

(1) 本紙談話784

(2) Proc. Nat. Acad. Sc. 1938: dependent probability and (L) space.

ルカドウカモ Birkhoff ハ証明シテナイ．彼ノヤッタコトガ具体的ニ(L)デ(6)ノ場合ヲヤッタコトニナルコトヲ示シ且ツ $\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} g^{(m)}$ ノ strong ニ収斂スルコトヲ示シタノガ角谷氏デアル。(1) 定理 ニヨレバ、モット強ク almost everywhere 収斂ガ出ル訳デアル。尚他ニ応用デキ相デアルケレドモ又ノ機會ニユヅル。

---

(1) 位相數學，第2巻第一号：抽象(L)空間ノ表現．