



Title	Stationary distribution ヲモツ Markoff Processニツイテ II
Author(s)	角谷, 静夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1940, 193, p. 68-75
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74775
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

845. Stationary distribution 7 モツ
Markoff Process = ツイテ II.

角 谷 静 夫 (阪大)

§ 3

$M(\varphi)$ = 於ケル Birkhoff, ergodic theorem
ヲ証明スルタメ先ヅ Infinite product space Ω^*
ヲ考ヘコゝ = completely additive + measure
 $\varphi^*(E)$ ヲ導入スル.

$$\Omega^* = \prod_{-\infty}^{+\infty} \Omega \text{ ハ } t^* = \{t_i^{(i)}\} \text{ (} i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \text{)} \text{ ヲ}$$

ル点列 t^* ヲ要素トスル空間ヲ t_i ハ Ω , 任意ノ点ヲ t_i .

ノ上ニ寄イタ記号 (i) ハ t_i ガ t^* ノ第 i 番目ノ坐標ヲアル
コトヲ示ス。(座標 i ハ $-\infty$ カラ $+\infty$ マデアルコトニ注意)

意). 記号的ニ $\Omega^* = \cdots \Omega^{(-2)} \times \Omega^{(-1)} \times \Omega^{(0)} \times \Omega^{(1)} \times \Omega^{(2)} \times \cdots$ ト

云フ風ニ表ハスコトニスル。次ニ Ω^* ノ部分集合 $E^* =$

$$E^* = \cdots \times \Omega^{(m-2)} \times \Omega^{(m-1)} \times E_m^{(m)} \times E_{m+1}^{(m+1)} \times \cdots \times E_n^{(n)} \times \Omega^{(n+1)} \times \Omega^{(n+2)} \times \cdots$$

ト云フ形ノモノヲ考ヘル。即チ $E^* \wedge t_i \in E_i, m \leq i \leq n$

$\Rightarrow t_i \in \Omega, i \leq m-1, i \geq n+1$ ナル如キ数列

$t^* = \{ t_i^{(i)} \} (i=1, 2, \cdots)$ 全体ノ集合デアアル。コレハ

又記号的ニ $E^* = E_m^{(m)} \times E_{m+1}^{(m+1)} \times \cdots \times E_n^{(n)}$ ト書クコトモ出
來ル。

コノ $E_i (m \leq i \leq n)$ ハ Ω ノ Borel 集合ヲ
 m, n ハ $-\infty < m \leq n < \infty$ ヲ満足スル正又ハ負ノ整数
デアアル。

カナル形ノ集合 E^* 全体ノ family $\mathcal{E}^*$ ヲ考ヘ。

$$F^* = \sum_{i=1}^n E_i^*, E_i^* \cdot E_j^* = 0 (i \neq j), E_i^* \in \mathcal{E}^* (i=1, 2, \cdots, n)$$

ナル形ノ集合 F^* 全体ノ family $\mathcal{F}^* =$ 表ハス。今

$\mathcal{P}^*(E^*)$ 及ビ $\mathcal{P}^*(F^*)$ ヲ

$$\mathcal{P}^*(E^*)$$

$$= \int_{E_m} \int_{E_{m+1}} \cdots \int_{E_n} \varphi(dt_m) P(t_m, dt_{m+1}) P(t_{m+1}, dt_{m+2}) \cdots P(t_{n-1}, dt_n)$$

$$\mathcal{P}^*(F^*) = \sum_{i=1}^n \mathcal{P}^*(E_i^*)$$

= ヨツテ定義スレバ $\varphi^*(F^*)$ ハ 明カニ $F^* = \tau$ 定義サレタ
 finitely additive + measure $\Rightarrow$ 且 $\forall \varphi^*(\Omega^*)$
 $= 1$ ヲ満足スル。

シカモ A. Kolmogoroff - T. L. Doob ⁽¹⁾ ノ 論法
 = ヨリ $\varphi^*(F^*)$ ハ又 $F^* = \tau$ completely additive
 = ナツテキルコトガワカル。

$$\text{即チ } F_n^* \in \mathcal{F}^*, F^* \in \mathcal{F}^*, \sum_{n=1}^{\infty} F_n^* = F^*, F_m F_n = 0$$

$$(m \neq n) \text{ デアレバ } \sum_{n=1}^{\infty} \varphi^*(F_n^*) = \varphi^*(F^*) \text{ トナル。ヨ}$$

ツテ、ヨク知ラレタ方法 = ヨリ ⁽²⁾ $\varphi^*(F^*)$ ハ $\mathcal{F}^*$ ヲ含ム最小
 1 Borel family $B(\mathcal{F}^*) = \tau$ completely
 additive = 拡張出来ル。

今 $\Omega^* = \tau$ translation $t^* \rightarrow S(t^*) = t^*$,

$$t^* = \left\{ t_i^{(i)} \right\}, t^{*'} = \left\{ t_{i+1}^{(i)} \right\}, (i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \text{ ヲ考}$$

ヘレバコノ $S(t^*)$ ハ容易ニワカル如ク φ^* -measure

(1) A. Kolmogoroff: Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Ergebnisse der Math.

J. L. Doob: Stochastic processes with an integral valued parameter, Trans. Amer. Math. Soc., 44 (1938), 87-150

(2) 例ヘバ E. Hopf: Ergodentheorie, p. 2-3.

preserving τ である。

次 Ω^* = 他ノ種類ノ measure ヲ導入スル。コ

ノタメ。 Ω^* ノ部分集合 $E^* = \tau E = E_m^{(m)} \times E_{m+1}^{(m+1)} \times \cdots \times E_n^{(n)}$

(但シ $1 \leq m \leq n < \infty$) ナル形ノ ϵ ノ全体ガ作ル family

$\bar{E}^*$ ヲ考ヘ更ニ $F^* = \sum_{i=1}^n E_i^*$, $E_i^* \cdot E_{j'}^* = 0$ ($i \neq j'$),

$E_i^* \in \bar{E}^*$ ($i = 1, 2, \dots, n$) ナル形ノ F^* 全体ノ family

$\bar{F}^*$ ヲ考ヘル。任意ノ $E^* \in \bar{E}^*$, $F^* \in \bar{F}^*$ = 對シ

テ

$$\bar{\mathcal{P}}_{t_0}^*(E^*)$$

$$= \int_{E_m} \int_{E_{m+1}} \cdots \int_{E_n} P^{(m)}(t_0, dt_m) P(t_m, dt_{m+1}) P(t_{m+1}, dt_{m+2}) \cdots \cdots P(t_{n-1}, dt_n)$$

$$\bar{\mathcal{P}}_{t_0}^*(F^*) = \sum_{i=1}^n \bar{\mathcal{P}}_{t_0}^*(E_i^*)$$

トオケバ $\bar{\mathcal{P}}_{t_0}^*(F^*)$ ノ明カニ $\bar{F}^*$ デ定義サレタ finite

ly additive measure デアル。シカルニ前ト全

リ同様ニシテ $\bar{\mathcal{P}}_{t_0}^*(F^*)$ ガ $\bar{F}^*$ デ completely addi-

tive デアルカラ $\bar{\mathcal{P}}_{t_0}^*(F^*)$ ノ又 $\bar{F}^*$ ヲ含ム最小ノ

Borel family $B(\bar{F}^*)$ = 拡張スルコトガ出来ル。

シカモコノトキ任意ノ $E^* \in B(\bar{F}^*)$ = 對シテ

$$(**) \int_{\Omega} \varphi(dt_0) \bar{\mathcal{P}}_{t_0}^*(E^*) = \varphi(E^*)$$

ガ成立スルコトガ容易ニワカル。

$\mu = M(\varphi) =$ 於ケル Birkhoff, ergodic theorem を証明シヨウ。上テ述べタコトニヨリ Ω^* = completely additive + measure φ^* ト φ^* -measure preserving + Ω^* , one-to-one transformation (translation) S トが見ツカッタカラ、 $L(\varphi^*) =$ 關シテ Ω^* 上ニテ ergodic theorem が成立スル。即チ

任意, $x^*(t^*) \in L(\varphi^*) =$ 對シテ $\bar{x}^*(t^*) \in L(\varphi^*)$ が定マツテ

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x^*(S^n(t^*)) \rightarrow \bar{x}^*(t^*)$$

φ^* -almost everywhere on Ω^* トナル。特ニ $x^*(t^*) = x(t_0)$, $t^* = \{t_i^*\} (i=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$, $x(t) \in M(\varphi)$ トルトキハ $x^*(t^*) \in M(\varphi^*) \subset L(\varphi^*)$ トナルカラ $\bar{x}^*(t^*) \in L(\varphi^*)$ (實ハ $\bar{x}^*(t^*) \in M(\varphi^*)$) が見ツカッタ

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x(t_n) \rightarrow \bar{x}^*(t^*)$$

φ^* -almost everywhere on Ω^* トナル。コノ收斂が成立シナイヨウナ点 t^* 集合ヲ E_0^* トセヨ。 $E_0^* \in B(\bar{\varphi}^*)$ デアルト考ヘテ差支ナシ。ヨッテ今モシ $\bar{\varphi}_{t_0}^*(E_0^*) = 0$ デアレバカナル $t_0 \in \Omega =$ 對シテ上式ヲ $\bar{\varphi}_{t_0}^*(E_0^*) =$ 關シテ積分スレバ

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \int_{\Omega} P^{(n)}(t_0, dt_n) x(t_n)$$

$$\rightarrow \int_{\Omega} \bar{g}_{t_0}^*(dt^*) \bar{x}^*(t^*) = \bar{x}(t_0)$$

トナル。ヨツテ

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \int_{\Omega} P^{(n)}(t_0, dt_n) x(t_n) \rightarrow \bar{x}(t_0)$$

が φ -almost everywhere = 成立スルコトヲ証明スル = ハ Ω 内 = アル φ -measure zero + 集合 E_0 が見ツカツテ $t_0 \in E_0$ ナルトキ $\bar{g}_{t_0}^*(E_0^*) = 0$ トナルコトヲ証明スルバ十分デアル。シカルニコレハ $(**)$ コリ

$$\int_{\Omega} \varphi(dt_0) \bar{g}_{t_0}^*(E_0^*) = \varphi^*(E_0^*) = 0$$

トナルコトヨリ殆ンド明カデアアル。

コレデ $M(\varphi)$ = 於ケル Birkhoff, ergodic theorem の証明が終ル。

§ 4

本 § = 於テハ inverse probability ヲ考ヘル。 $P(t, E)$ が stable distribution $g(E)$ ナモツトキ

$$\Phi(F, E) = \int_F \varphi(dt) P(t, E)$$

トオケバ $\Phi(F, E)$ ハ任意ノ Borel set F, E = 対シテ定義サレテ

$$\Phi(F, E) \leq \varphi(E), \quad \Phi(\Omega, E) = \varphi(E)$$

ヲ満足スル。ヨツテ各々ノ F = 対シテ Borel measurable function $R(F, S)$ が定マツテ

$$\Phi(F, E) = \int_E R(F, S) \varphi(ds)$$

トナル。コゝニ $R(F, S)$ ハ各々ノ F = 對シテ φ -measure 0 ノ集合ヲ除イテ定マリ且ツ $R(\Omega, S) \equiv 1$ デアル。

然ルニ今 Ω ノ Borel 集合全体ガ φ -measure = 關シテ separable デアレバ J. v. Neumann-J. L. Doob ノ方法 = ヨツテ* $R(F, S)$ が各ノ S = 對シテ F = 關シテ completely additive デアルト考ヘテヨイコトガワカル。然ルトキハ $R(F, S)$ ハ又ニツノ Markoff Process ト考ヘルコトが出来ル。

實際 $R(F, S)$ ハ $S \in \Omega$ ナル爲ガ $(P(t, E))$ ナル Markoff Process = テウゴクトキ) 單位時間前 = F = アツタ probability = 外ナラヌ。此ノ如ク考ヘルト吉田氏が考ヘラレタ $f \rightarrow f^{(-1)}$ ナル逆ノ operator ハ實ハ $R(F, S)$ ナル Markoff process = 關スル正ノ operator = 外ナラヌコトガワカル。コノ様ニシテ

* コノ方法ガ可能デアルコトハ吉田氏ノ注意 = ヨルモ、デアリマス。コゝニ吉田氏 = 對シテ感謝致シマス。

$P(t, E)$ と $R(F, S)$ とハ全ク dual = ナツテキルコ
トが示サレル。(實際 $R(F, S)$ ハ又 $q(E)$ ナ stable
distribution = ナ、 $R(F, S)$ ノ inverse ハ
 $P(t, E)$ = ナルノデアル)。

コノ duality ノ議論ハ operator-theory,
オデ考ヘルト大ヘン面白イノデアルガ、コレハ次ノ機會 = エ
ズルコト = スル。