OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	Stationary distribution ヲモツ Markoff Processニツイテ II
Author(s)	角谷, 靜夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1940, 193, p. 68-75
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74775
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

845. Stationary distribution ヲモツ Markoff Process ニツイテ II.

角谷 静夫 (阪大)

§3

M(φ) ニ於ケル Birkhoff, ergodic theorem ヲ証明スルタメ先ヅ Infinité product space Ω^* ヲ考ヘコレニ completely additive + measure $\varphi^*(E)$ ヲ導入スル.

$\Omega^* = \prod_{-\infty}^{+\infty} \Omega$ ノ $t^* = \{t_i^{(i)}\}$ $(i = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots)$ ナル点列 t^* ヲ要素トスル空間デ t_i ハ Ω ノ任意ノ点デ t_i.

ノ上ニ書イタ記号 (i) ハ t_i ガ t^* ノ第 i 番目ノ座標デアルコトヲ示ス。（座標 i ハ $-\infty$ カラ $+\infty$ マデアルコトニ注意）。記号的ニ $\mathfrak{S}^* = \cdots\cdots \overset{(-2)}{\mathfrak{S}} \times \overset{(-1)}{\mathfrak{S}} \times \overset{(0)}{\mathfrak{S}} \times \overset{(1)}{\mathfrak{S}} \times \overset{(2)}{\mathfrak{S}} \times \cdots\cdots$ ト云フ風ニ表ハスコトニスル。次ニ $\mathfrak{S}^*$ ノ部分集合 E^* ニテ

$$E^* = \cdots\cdots \times \overset{(m-2)}{\mathfrak{S}} \times \overset{(m-1)}{\mathfrak{S}} \times \overset{(m)}{E_m} \times \overset{(m+1)}{E_{m+1}} \times \cdots\cdots \times \overset{(n)}{E_n} \times \overset{(n+1)}{\mathfrak{S}} \times \overset{(n+2)}{\mathfrak{S}} \times \cdots\cdots$$

ト云フ形ノモノヲ考ヘル。即チ E^* ハ $t_i \in E_i$, $m \leqq i \leqq n$ ニヲ $t_i \in \mathfrak{S}$, $i \leqq m-1$, $i \geqq n+1$ ナル如キ点列 $t^* = \{\overset{(i)}{t_i}\}$ $(i = 1, 2, \cdots\cdots)$ 全体ノ集合デアル。コレハ又記号的ニ $E^* = \overset{(m)}{E_m} \times \overset{(m+1)}{E_{m+1}} \times \cdots\cdots \times \overset{(n)}{E_n}$ ト書クコトモ出来ル。

コゝニ E_i $(m \leqq i \leqq n)$ ハ $\mathfrak{S}$ ノ Borel 集合デ m, n ハ $-\infty < m \leqq n < \infty$ ヲ満足スル正又ハ負ノ整数デアル。

カヽル形ノ集合 E^* 全体ノ family $\mathcal{E}^*$ ヲ考ヘ、

$$F^* = \sum_{i=1}^{n} E_i^*, \quad E_i^* \cdot E_j^* = 0 \ (i \neq j), \quad E_i^* \in \mathcal{E}^* \ (i = 1, 2, \cdots, n)$$

ナル形ノ集合 F^* 全体ノ family ヲ $\mathcal{F}^*$ ニテ表ハス。今 $\varphi^*(E^*)$ 及ビ $\varphi^*(F^*)$ ヲ

$$\varphi^*(E^*) = \int_{E_m} \int_{E_{m+1}} \cdots\cdots \int_{E_n} \varphi(dt_m) P(t_m, dt_{m+1}) P(t_{m+1}, dt_{m+2}) \cdots\cdots P(t_{n-1}, dt_n)$$

$$\varphi^*(F^*) = \sum_{i=1}^{n} \varphi^*(E_i^*)$$

ニヨッテ定義スレバ $\varphi^*(F^*)$ ハ明カニ F^* ニテ定義サレタ finitely additive + measure デ且ツ $\varphi^*(\Omega^*)=1$ ヲ満足スル。

シカモ A. Kolmogoroff－T. L. Doob[1]，論法ニヨリ $\varphi^*(F^*)$ ハ又 F^* ニ於テ completely additive ニナッテヰルコトガワカル。

即チ $F_n^* \in \mathfrak{f}^*$, $F^* \in \mathfrak{f}^*$, $\sum_{n=1}^{\infty} F_n^* = F^*$, $F_m F_n = C$ $(m \neq n)$ デアレバ $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi^*(F_n^*) = \varphi^*(F^*)$ トナル。ヨッテ、ヨク知ラレタ方法ニヨリ[2] $\varphi^*(F^*)$ ハ $\mathfrak{f}^*$ ヲ含ム最小ノ Borel family $B(\mathfrak{f}^*)$ ニマデ completely additive ニ拡張出来ル。

今 Ω^* ニ於ケル translation $t^* \to S(t^*) = t^*{}'$

$t^* = \{t_i^{(i)}\}$, $t^{*\prime} = \{t_{i+1}^{(i)}\}$, $(i = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots)$ ヲ考ヘレバコノ $S(t^*)$ ハ容易ニワカル如ク φ^*－measure

---

(1) A. Kolmogoroff: Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Ergebnisse der Math.
J. L. Doob: Stochastic processes with an integral valued parameter, Trom. Amer. Math. Soc., 44 (1938), 87－150

(2) 例ヘバ E. Hopf: Ergodentheorie, P. 2－3.

preserving デアル。

次ニ Ω^* ニ他ノ種類ノ measure ヲ導入スル．コノタメ．Ω^* ノ部分集合 E^* ニテ $E^* = E_m^{(m)} \times E_{m+1}^{(m+1)} \times \cdots \times E_n^{(n)}$（但シ ノ当 $m \leqq n < \infty$）ナル形ノモノ全体ガ作ル family $\overline{\mathcal{E}}^*$ ヲ考ヘ更ニ $F^* = \sum_{i=1}^{n} E_i^*$, $E_i^* \cdot E_j^* = 0$ $(i \neq j)$。$E_i^* \in \overline{\mathcal{E}}^*$ $(i = 1, 2, \cdots\cdots, n)$ ナル形ノ F^* 全体ノ family $\overline{\mathcal{F}}^*$ ヲ考ヘル．任意ノ $E^* \in \overline{\mathcal{E}}^*$, $F^* \in \mathcal{F}^*$ ニ對シテ

$$\overline{\varphi}_{t_0}^*(E^*)$$

$$= \int_{E_m} \int_{E_{m+1}} \cdots\cdots \int_{E_n} P^{(m)}(t_0, dt_m) P(t_m, dt_{m+1}) P(t_{m+1}, dt_{m+2}) \cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots P(t_{n-1}, dt_n)$$

$$\overline{\varphi}_{t_0}^*(F^*) = \sum_{i=1}^{n} \overline{\varphi}_{t_0}^*(E_i^*)$$

トオケバ $\overline{\varphi}_{t_0}^*(F^*)$ ハ明カニ $\overline{\mathcal{F}}^*$ デ定義サレタ finitely additive measure デアル．シカルニ前ト全リ同様ニシテ $\overline{\varphi}_{t_0}^*(F^*)$ ガ $\overline{\mathcal{F}}^*$ デ completely additive デアルカラ $\overline{\varphi}_{t_0}^*(F^*)$ ハ又 $\overline{\mathcal{F}}^*$ ヲ含ム最小ノ Borel family $B(\overline{\mathcal{F}}^*)$ ニ拡張スルコトガ出来ル。シカモコノトキ任意ノ $E^* \in B(\overline{\mathcal{F}}^*)$ ニ對シテ

$$(***) \quad \int_{\Omega} \varphi(dt_0) \overline{\varphi}_{t_0}(E^*) = \varphi(E^*)$$

ガ成立スルコトガ容易ニワカル。

次ニ $M(\varphi)$ ニ於ケル Birkhoff, ergodic theorem ヲ証明シヨウ. 上デ述ベタコトニヨリ $\mathfrak{B}^*$ = completely additive + measure φ^* ト φ^*-measure preserving + $\mathfrak{B}^*$, one-to-one transformation (translation) S トガ見ツカッタカラ、$L(\varphi^*)$ ニ関シテ $\mathfrak{B}^*$ 上ニテ ergodic theorem ガ成立スル。即チ

任意ノ $x^*(t^*) \in L(\varphi^*)$ ニ對シテ $\overline{x}^*(t^*) \in L(\varphi^*)$ ガ定マッテ

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x^*(S^n(t^*)) \longrightarrow \overline{x}^*(t^*)$$

φ^*-almost everywhere on $\mathfrak{B}^*$

トナル. 特ニ $x^*(t^*) = x(t_0)$, $t^* = \{t_i^{(i)}\}$ $(i = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots)$, $x(t) \in M(\varphi)$ ナルトキハ $x^*(t^*) \in M(\varphi^*) \subset L(\varphi^*)$ トナルカラ $\overline{x}^*(t^*) \in L(\varphi^*)$ (實ハ $\overline{x}^*(t^*) \in M(\varphi^*)$) ガ見ツカッテ

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x(t_n) \longrightarrow \overline{x}^*(t^*)$$

φ^*-almost everywhere on $\mathfrak{B}^*$

トナル。コノ収斂ガ成立シナイヨウナ点 t^* ノ集合ヲ E_0^* トセヨ。$E_0^* \in B(\overline{\mathfrak{T}}^*)$ デアルト考ヘテ差支ナイ. ヨッテ今モシ $\overline{\varphi}_{t_0}^*(E_0^*) = 0$ デアレバカヘル $t_0 \in \mathfrak{B}$ ニ對シテ上式ヲ $\overline{\varphi}_{t_0}^*(E^*)$ ニ関シテ積分スレバ

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\int_{\Omega} P^{(n)}(t_0, dt_n)\,x(t_n)$$

$$\longrightarrow \int_{\Omega} \bar{\varphi}^{*}_{t_0}(dt^{*})\,\bar{x}^{*}(t^{*}) \equiv \bar{x}(t_0)$$

トナル。ヨツテ

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\int_{\Omega} P^{(n)}(t_0, dt_n)\,x(t_n) \longrightarrow \bar{x}(t_0)$$

が φ-almost everywhere = 成立スルコトヲ証明スルニハ Ω 内ニアル φ-measure zero ナ集合 E_0 が見ツカッテ $t_0 \bar{\in} E_0$ ナルトキ $\bar{\varphi}^{*}_{t_0}(E_0^{*}) = 0$ トナルコトヲ証明スレバ十分デアル。シカルニコレハ (**) ヨリ

$$\int_{\Omega} \varphi(dt_0)\,\bar{\varphi}^{*}_{t_0}(E_0^{*}) = \varphi^{*}(E_0^{*}) = 0$$

トナルコトヨリ殆ンド明カデアル。

コレデ $M(\varphi)$ ニ於ケル Birkhoff, ergodic theorem ノ証明ガ終ル。

§4

本§ニ於テハ inverse probability ヲ考ヘル。$P(t, E)$ が stable distribution $\varphi(E)$ ヲモツトキ

$$\Phi(F, E) = \int_{F} \varphi(dt)\,P(t, E)$$

トオケバ 亜(F, E) ハ任意ノ Borel set F, E ニ対シテ定義サレテ

$$亜(F, E) \leqq \varphi(E), \quad 亜(\mathfrak{S}, E) = \varphi(E)$$

ヲ満足スル，ヨッテ各々ノ F ニ対シテ Borel measurable function R(F, S) ガ定マッテ

$$亜(F, E) = \int_E R(F, S)\, \varphi(dS)$$

トナル．コゝニ R(F, S) ハ各々，F ニ對シテ φ-measure 0 ノ集合ヲ除イテ定マリ且ツ R(𝔖, S) ≡ 1 デアル。

然ルニ今 𝔖 ノ Borel 集合全体が φ-measure ニ関シテ separable デアレバ J. v. Neumann-J. L. Doob ノ方法ニヨッテ* R(F, S) ガ各ノ S ニ対シテ F ニ関シテ completely additive デアルト考ヘテヨイコトガワカル。然ルトキハ R(F, S) ハ又一ツノ Markoff Process トモ考ヘルコトガ出來ル。

實際 R(F, S) ハ S∈𝔖 ナル点ガ (P(t, E) ナル Markoff Process ニテウゴクトキ) 単位時間前ニ F ニアッタ probability ニ外ナラヌ。此ノ如ク考ヘルト吉田氏ガ考ヘラレタ $f \to f^{(-1)}$ ナル逆ノ operator ハ實ハ R(F, S) ナル Markoff process ニ関スル正ノ operator ニ外ナラヌコトガワカル．コノ様ニシテ

---

* コノ方法ガ可能デアルコトヘ吉田氏ノ注意ニヨルモノデアリマス、コゝニ吉田氏ニ対シテ感謝致シマス。

$P(t,E)$ ト $R(F,S)$ トハ全ク dual ナツテヰルコトが示サレル。(實際 $R(F,S)$ ハ又 $g(E)$ ヲ stable distribution ニモチ、$R(F,S)$ ノ inverse ハ $P(t,E)$ ナルノデアル)。

コノ duality ノ議論ハ operator-theory ノ方デ考ヘルト大ヘン面白イノデアルが、コレハ次ノ機會ニユズルコトニスル。