



Title	Haar measure 存在ノ証明ニ就テ (河田氏ノ手紙ヨリ)
Author(s)	河田, 敬義
Citation	全国紙上数学談話会. 1940, 194, p. 76-79
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74776
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

846 Haar measure 存在ノ証明ニ就テ

(河田氏ノ手紙ヨリ)

河田 敬義(東大)

Markoff Processヲ用ヒテ Haar Measure
ヲ求メルトイフ問題ハ一般ノ locally compact group
デハ、トテモ出来サウモアリマセンガ、compact group
ノトキ、從ツテ同様ニ almost periodic functionノ
meanノ valueノ存在ノ場合ニハ以前ニ彌永先生ト小坪
君トカラ聞イタコトノアル証明法ヲ若干変形シテダケテ得ラ
レルヌヲ思ヒマスノデ、以下ニ述べサセテ頂キタイト思ヒ
マス。

「群 G ノ上ノ almost periodic function $f(x)$ ガ
與ヘラレルト定義カラ

$$\rho(x, y) = \lim_{ab \in G} |f(axb) - f(ayb)|$$

デ G ニ一般ノ metricヲ入レルト totally bounded
ニナリマスカラ $\varepsilon_n \rightarrow 0$ ナル正数列ヲ取り、 ε_n ニ對シテ
 $G = E_1^{(\varepsilon_n)} + \dots + E_{r_n}^{(\varepsilon_n)}$ ト直径ガ ε_n 以下ノ有限箇ノ dis-
joint setsニ分ケルコトが出来マス。 $E_i^{(\varepsilon_n)}$ カラ任意
ニ一点 $p_i^{(\varepsilon_n)}$ ヲトリ ($n=1, 2, \dots; i=1, \dots, r_n$)。
其等ヲ列ベテ $p_1, p_2, \dots$ トシ、 $p_r = \frac{1}{2r}$ ナル proba-
bilityヲ分布スルコトニヨツテ G ノ上ニ completely
additive + probability distribution $P(E)$ ヲ

作りマス。

此レカラ単位時間ニ於ケル遷移確率 $P(x, E) = P(x^1 E)$ ナル Markoff Process ヲ考ヘマス。

$$P^{(n)}(x, E) = \int_G P^{(n-1)}(x, dy) P(y, E), \quad (P^{(1)}(x, E) = P(x, E)).$$

$$f^{(n)}(x) = \int_G P^{(n)}(x, dy) f(y) \text{ トスレバ}$$

$$(1) \quad f^{(n)}(x) \longrightarrow M_x f(x) = \text{const.} \quad (\text{uniformly})$$

ガ証明出来マス。(但シ $f(x)$ ハ real function トシテ置キマス)。

$$\text{其レニハ } M_n = \overline{\lim} f^{(n)}(x), \quad m_n = \underline{\lim} f(x).$$

$$O_n = M_n - m_n \quad (n = 0, 1, \dots, f^{(0)}(x) = f(x))$$

ト置ケバ

$$M_n \geq M_{n+1} \geq m_{n+1} \geq m_n, \quad O_n \geq O_{n+1} \geq \dots$$

カラ $O_n \rightarrow 0$ ヲ証明スレバヨイ事ナリマス。

今樂ヘラレタ $\varepsilon = \text{對シテ } \exists \varepsilon_n < \varepsilon = \varepsilon_n$ ヲ取り與ヘラレタ $x, y = \text{對シテ } x \in E_1^{(n)} \wedge y \in E_s^{(n)} \neq \emptyset$ ナル S フーツ取リマス (以下 $E_1^{(n)}, \dots, (n)$ ヲ省キマス)。 $P(E)$ ノ定義カラ $P(E_i) > \mu > 0$ ($i = 1, \dots, n_r$) ナル μ ガ存在シマスカラ

$$f^{(l)}(x) - f^{(l)}(y) = \int_G f^{(l-1)}(xt) P(dt) - \int_G f^{(l-1)}(yt) P(dt)$$

$$= \int_{E_1} f^{(l-1)}(xt) P(dt) + \int_{G-E_1} f^{(l-1)}(xt) P(dt)$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{E_S} f^{(l-1)}(yt) P(dt) - \int_{G-E_S} f^{(l-1)}(yt) P(dt) \\
& \leq P(E_l) \cdot \overline{\lim_{t \in xE_l}} f^{(l-1)}(t) + P(G-E_l) \cdot M_{l-1} \\
& \quad - P(E_S) \underline{\lim_{t \in yE_S}} f^{(l-1)}(t) - P(G-E_S) \cdot m_{l-1} \\
& \leq \left(\overline{\lim_{t \in xE_l}} f^{(l-1)}(t) - \underline{\lim_{t \in yE_S}} f^{(l-1)}(t) \right) \mu + (1-\mu) \sigma_{l-1}
\end{aligned}$$

然ル $x E_l + y E_S = \text{論ケル } f^{(l-1)}(t) \text{ の Oscillation}$
 ハ $f^{(l-1)}(t)$ の定義, E_l の定義カラ

$x E_l \cap y E_S \neq \emptyset \exists \mid 2 \varepsilon_n \text{ヲ超エナシ。故ニ } x, y \text{ ハ}$
 任意ナルカラ

$$\sigma_l \leq 2 \varepsilon_n \mu + (1-\mu) \sigma_{l-1}$$

之レカラ

$$\begin{aligned}
\sigma_l & \leq 2 \varepsilon_n \mu \{ 1 + (1-\mu) + \dots + (1-\mu)^{l-1} \} + (1-\mu)^l \sigma_0 \\
& \leq 2 \varepsilon_n + (1-\mu)^l \sigma_0
\end{aligned}$$

$$\text{故ニ } (1-\mu)^{n_0} \sigma_0 < \frac{\varepsilon}{2} = n_0 \text{ヲ取ルト } n \geq n_0 \text{ 時}$$

$$\sigma_n \leq \varepsilon \text{ トナル。即チ } \sigma_n \rightarrow 0.$$

之レカラ直チニ

$$M_t f(t) = M_t f(at), \quad M(\lambda f(t)) = \lambda M(f(t)).$$

$$\text{又 } \rho'(x, y) = \overline{\lim_{a, b}} |f(axb) - f(ayb)| + \overline{\lim_{a, b}} |g(axb) - g(ayb)|$$

ヲ用ヒテ、ニツノ a. p. f. $f(x) g(x)$ = 對シテ

$$M(f(t) + g(t)) = M f(t) + M g(t)$$

トナル。

$$\text{又 } \left| Mf(t) - \sum_{i=1}^N \alpha_i f(ta_i) \right| < \varepsilon + \alpha_i > 0 \quad \sum_1^N \alpha_i = 1$$

ナル $\alpha_i, a_i \in G$ 存在ハ

$f^{(m)}(x)$ ハ定義カラ

$$\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i f(tb_i), \beta_i > 0 \quad \sum_1^{\infty} \beta_i = 1$$

ナル形トナルカラ

$$\text{先ツ } \left| Mf - f^{(m)}(t) \right| < \frac{\varepsilon}{2} = N \text{ヲ取り } \beta_0 = \sum_N \beta_i < \frac{\varepsilon}{2\sigma_0}$$

$= N \text{ヲ取レバ, } \beta_0 = 1 \text{ トシテ}$

$$\left| Mf - \sum_{i=0}^{N-1} \beta_i f(\tilde{b}_i) \right| \leq \left| Mf - f^{(m)}(t) \right|$$

$$+ \left| f(t) - \sum_0^{N-1} \beta_i f(\tilde{b}_i) \right| < \varepsilon$$

ヲ満足スル。

同様ニ $P'(x, E) = P(Ex^{-1})$ ナル Markoff Process
ヲ考ヘテ right invariant +, mean が得ラレ、其レ
等が一致シテ unique ナルコトハ J. v. Neumann,
Compositio Math. Vol. I / 論法カラ直チニ分リ
マス。』