



Title	Compact 群上ノ Markoff Process
Author(s)	河田, 敬義; 伊藤, 清
Citation	全国紙上数学談話会. 1940, 194, p. 80-93
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74777
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

847. Compact 群上 / Markoff Process.

河田 敬義 (東大)

伊藤 清 (内閣統計局)

Stationary distribution をもつ Markoff process / 特別 / 場合として separable compact group G / 上 / Markoff process を考へルコトが出来ル。即ち G 上 / Borel set $E =$ 対スル completely additive, non negative + set function $p(E)$ (特 = $p(G) = 1$) カラ、單位時間後 = x が E 内 = 移ル確率 $P(x, E)$ が

(i) $P(x, E) = p(x^{-1}E)$, 特 = $p(1, E) = p(E)$
= 依ツテ與ヘラレル場合デアル。

此レが G / invariant measure $m_G(E)$, ($m_G(G) = 1$) を stable distribution として持ッコトハ

$$\begin{aligned} (i) \quad \varphi(E) &= \int_G m_G(dx) P(x, E) = \int m_G(dx) p(x^{-1}E) \\ &= \int m_G(dx) p((ax)^{-1}aE) \\ &= \int m_G(d(ax)) P(ax, aE) = \varphi(aE) \end{aligned}$$

カラ $\varphi(E)$ は invariant measure とナリ Haar measure / 一義性ト $\varphi(G) = 1$ ヨリ $\varphi(E) = m_G(E)$ ト

ナルコトカラヲカル。¹⁾

$$p(E) = p^{(1)}(E) \text{ トオキ}$$

$$(2) \quad p^{(n)}(E) = \int_G p^{(n-1)}(y^{-1}E) p^{(1)}(dy)$$

トスレバ

$$P^{(n)}(x, E) = \int_G P^{(n-1)}(x, dy) P^{(1)}(y, E) = p^{(n)}(x^{-1}E)$$

トナル。故 $= p^{(n)}(E)$, $n \rightarrow \infty$ まで調べれば充分デアル。

点 x が probability function $P(E)$ の Spectrum
= 属スルトハ任意ノ x を含ム open set E = 對シテ

$p(E) > 0$ を意味スルトスレバ、 p の Spectrum ハ G
ノ closed subset S = ナル。 H 7 S 7 generate せ
ル closed subgroup トスレバ、

7 H closed subgroup H_0 = 對シテ

$$(3) \quad p(E) = 0 \quad \text{for} \quad E \cap H_0 = 0$$

ナレバ $H \subseteq H_0$ トナル。 H ハカナル H_0 ノ最小ナモノデア
ル。

特 $= H = G$ ノトキ = probability function $p(E)$
"proper in G " ト呼ブコト = スル。

$$\begin{aligned} p^{(2)}(E) &= \int_G p(x^{-1}E) p(dx) = \int_H p(x^{-1}E) p(dx) \\ &= \int_H p(x^{-1} \cdot E \cap H) p(dx) = p^{(2)}(E \cap H) \end{aligned}$$

1) 之ノ方法ハ小沢氏ノ角谷氏ニ教ヘタイクダシタ。

ナル故 $E \cap H = \emptyset$ ナラ $p^{(2)}(E) = 0$ トナル。一般 =

$$(4) \begin{cases} p^{(n)}(E) = 0 & \text{for } E \cap H = \emptyset \\ p^{(n)}(E) = \int_H p^{(n-1)}(x^+ E) p(dx) & \text{for } E \subseteq H. \end{cases}$$

トナルカラ 問題ハ全ク H ノ中ニ制限サレル。然ルニコノ *probability function* ナ H ノミデ考ヘレバ *proper* トナルカラ 今後 *proper in G* ナ場合ノミヲ考ヘルコトニスル。

$p^{(n)}(E)$ ハ一般ニ $n \rightarrow \infty$ ニ對シテ收斂シナイコトハ次ノ例デヨイ。即チ G ナ円周 (周長ヲ 1 トスル) ノ廻轉群トシ ω ナ無理數トスル時

$$\begin{cases} p(E) = 1, & E \ni \omega \\ p(E) = 0, & E \not\ni \omega \end{cases}$$

デ定義スレバ

$$p^{(n)}(E) = \begin{cases} 1, & E \ni n\omega \pmod{1} \\ 0, & E \not\ni n\omega \pmod{1} \end{cases}$$

トナルカラ $p^{(n)}(E)$ ハ $n \rightarrow \infty$ ノトキニ收斂シナイ。然レ此ノ時モ *Weyl* ノ一様分布ノ理論カラ *interval* $I =$ 對シテハ

$$(5) \frac{1}{n} (p^{(1)}(I) + p^{(2)}(I) + \dots + p^{(n)}(I)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} m_G(I)$$

トナルコトガヨク知ラレテキル。(5) ハ一般ノ *Borel set* E ニ對シテハ必ズレモ成立シナイコトハ E トシテ G カラ $n\omega \pmod{1}$ ($n=1, 2, 3, \dots$) ナ除イタ残リヲ考ヘテミ

レバ $\frac{1}{n} (p^{(1)}(E) + \dots + p^{(n)}(E)) = 0$ デアルカラ (5) ハ
 明カニ成立シナイ。此ノコトハ一般ノ G デ continuous
 set トイフ名デ區別サレル。即チ E が $m_G =$ 對シテ con-
 tinuous set デアルトハ E ノ closure 7 $\bar{E}$, E ノ内
 点全体7 E° トスルトキ $m_G(E) = m_G(\bar{E}) = m_G(E^\circ)$
 ナルコトヲイフ。ソウスレバ (5) ハ continuous set =
 對シテハ成立スルコトがヨク知ラレテキル。一般ニ $p(E)$ が
 カナル特別ナ場合ヲ除イテハ實際ニ $p^{(n)}(E)$ 自身が $n \rightarrow \infty$
 ノ時ニ收斂スル。

定理 I. $p(E)$ ハ proper in G トスルト

(I) m_G ノ continuous set $E =$ 對シテ常ニ

$$(6) \quad \frac{1}{n} (p^{(1)}(E) + \dots + p^{(n)}(E)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} m_G(E)$$

が成立スル。

(II) 若シモ $p(E)$ ノ Spectrum S が G ノ closed
invariant subgroup H ノ一ツノ Nebenclass
 $S_0 H (= H S_0)$ ニ含まレルナラバ:

$$(7) \quad S \subseteq S_0 H, \quad S_0 \notin H,$$

G/H ハ abelian トナリ、 $\{S_0 H\}$ デ $S_0 H$ デ generate
サレル subgroupヲ表ハセバ

$$G = \{S_0 H\}$$

トナリ $E' \subset H$ 7 H ノ invariant measure $m_H =$ 關スル
continuous set トスレバ

$$(7') \quad p^{(n)}(S_0^n E') \xrightarrow{n \rightarrow \infty} m_H(E')$$

トナル。故 $= p^{(n)}(E)$ ハ勿論一般 $= n \rightarrow \infty$ ノトキニ収
斂シナイ。

(III) 若シ $\in p(E)$ / Spectrum $S =$ 對シテ (η) ヲ
満足スル χ ナ $1 + S_0$ が存在シナイヲラベ (6) ヨリニ強イ。

$$(8) \quad p^{(n)}(E) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} m_G(E)$$

カスベテノ m_G - continuous set $E =$ 對シテ成立
スル。

(7), (8) ハヨク知ラレヲキル χ = 次ノ $(\eta^0), (8^0)$ ト等
シ値デアール:

スベテノ連続函数 $f(x) =$ 對シテ

$$(\eta^0) \quad \frac{1}{n} \left(\int_G f(x) p^{(1)}(dx) + \dots + \int_G f(x) p^{(n)}(dx) \right) \\ \longrightarrow \int_G f(x) m_G(dx)$$

$$(8^0) \quad \int_G f(x) p^{(n)}(dx) \longrightarrow \int_G f(x) m_G(dx).$$

定理ノ証明 = ハ、實數全体ノ上ニ分布スル確率変數ノ
characteristic function ノ考ヘテ変形シテ
characteristic matrices ヲ用フル。

G / inequivalent ナ可附番窗ノ continuous
unitary irreducible representations ヲ

$$G \ni S \longrightarrow D^{(r)}(S) = \left(d_{ij}^{(r)}(S) \right); (r=0, 1, 2, \dots)$$

トスルトキ G / Borel sets $\{E\}$ / 上ノ completely

additive + set function $p(E)$, characteristic matrices $D_0^{(r)}(p)$ ($r = 0, 1, 2, \dots$) トハ

$$(q) \quad D_0^{(r)}(p) = \left(\int_G d_{ij}^{(r)}(s) p(ds) \right)$$

ノコトヲスル。characteristic function, 時, Lévyノ定理 = 對應シテ

Lemma I. $\{p^{(n)}(E) + \nu \text{ completely additive set function} = \text{於テ}$

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} p^{(n)}(E) = p^{(0)}(E)$ for all $p^{(0)}$ -continuous set E

$$(ii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_G f(s) p^{(n)}(ds) = \int_G f(s) p^{(0)}(ds)$$

for all continuous function $f(s)$

$$(iii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} D_0^{(r)}(p^{(n)}) = D_0^{(r)}(p^{(0)}), \quad r = 0, 1, 2, \dots$$

ハ互ニ等値デアアル。』

(i) ト (ii) トノ等値ハ既ニ述べタ様ニ良ク知ラレテキル事實デアアル。

(ii) カラ (iii) ノ出ルコトハ $d_{ij}^{(r)}(s)$ ハ G ノ continuous function デアルカラ明カデアアル。逆 = (iii) カラ (ii) ノ出ルコトハ任意ニ與ヘラレタ $f(x)$ ト ε = 對シテ先ヅ J. Neumannノalmost periodic functionノapproximation theoremカラ

$$(10) \quad \left| f(x) - \sum d_{ij}^{(r)} d_{ij}^{(r)}(x) \right| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad x \in G$$

ヲ満足スルヤ η = 有限箇ノ $d_{ij}^{(r)}(x)$ が存在スル。故 =

$$\left| \int_G f(x) p^{(n)}(dx) - \sum d_{ij}^{(r)} \int_G d_{ij}^{(r)}(x) p^{(n)}(dx) \right| < \frac{\varepsilon}{4}$$

一方 $\sum |d_{ij}^{(r)}| = C =$ 對シテ (iii) カラ (10) = η ラハレル (r)
= 對シテ

$$\left| \int_G d_{ij}^{(r)}(x) p^{(n)}(dx) - \int_G d_{ij}^{(r)}(x) p^{(0)}(dx) \right| < \frac{\varepsilon}{2C}$$

for $n > n_0$

ト n_0 がキマルカラ、之等ヲ合セテ

$$\left| \int_G f(x) p^{(n)}(dx) - \int_G f(x) p^{(0)}(dx) \right| < \varepsilon, n > n_0$$

即チ (ii) が成立スル。

Lemma 2. $\square$

$$(11) \quad D_0^{(r)}(p^{(n)}) = (D_0^{(r)}(p))^n \quad (r=0,1,2,\dots)$$

(証) $D^{(r)}(s)$ ハ G / representation +ル故
 $D^{(r)}(s_1, \dots, s_n) = D^{(r)}(s_1) \dots D^{(r)}(s_n)$ ト +ルカラ

$$\begin{aligned} D_0^{(r)}(p^{(n)}) &= \int_G D^{(r)}(s) p^{(n)}(ds) \\ &= \int_G \dots \int_G D^{(r)}(s_1, \dots, s_n) p(ds_1) \dots p(ds_n) \\ &= \int_G D^{(r)}(s_1) p(ds_1) \dots \int_G D^{(r)}(s_n) p(ds_n) \\ &= (D_0^{(r)}(p))^n \end{aligned}$$

ト +ル。

今後 $D^{(0)}(s) \equiv G$ / identity representation トス
 ルト, 一般 =

$$D_o^{(0)}(p) = I$$

トナル。特 = invariant measure m_G = 對シテハ
 $\gamma \neq D$ + $\int_G d_{ij}^{(r)}(s) m_G(ds) = 0$ カラ

$$(12) \quad D_o^{(r)}(m_G) = 0 \quad (r = 1, 2, \dots)$$

が成立スル。故 = 例ヘバ (8) 式ヲ証明スルニハ Lemma 1,
 2 ヲリ

$$(13) \quad (D^{(r)}(p))^n \rightarrow 0 \quad (r = 1, 2, \dots)$$

ヲ言ヒサヘスレバヨイコトナル。ソレニハ又 $D^{(r)}(p)$ ノ
 スベテノ Eigenvalue ノ 絶對値ガ 1 ヲリ小デアリサヘ
 スレバヨイ。

今 $\omega^{(r)}$ $D^{(r)}(p)$ ノ一ツノ Eigenvalue トシ、其
 レニ對スル長サ 1 ナル Eigenvector $\eta^{(1)}$ トスル:

$$D^{(r)}(p) \eta^{(1)} = \omega^{(r)} \eta^{(1)}.$$

今 $\psi^{(i)} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (1ハ i 番目) ($i = 1 \dots n$)
 ニ對シテ unitary transformation U_r ヲトリ

$$U \psi^{(1)} = \eta^{(1)}$$

= 擇ブ。シカルトキハ

$$\bar{D}_o^{(r)}(p) = U_r^{-1} D_o^{(r)}(p) U_r \quad \wedge$$

$$(\bar{d}_{ij}^{(r)}(s)) = \bar{D}^{(r)}(s) = U_r^{-1} D^{(r)}(s) U_r$$

ナル既約表現ニ對スル characteristic matrix
トナリ

$$\bar{D}_0^{(r)}(p) \psi^{(r)} = \omega^{(r)} \psi^{(r)} \text{ トナル。即チ}$$

$$\bar{D}_0^{(r)}(p) = \begin{pmatrix} \omega^{(r)} & & \\ & 0 & \\ & \vdots & \\ & 0 & \end{pmatrix} *$$

ノ形トナル。故ニ

$$(14) \quad \omega = \int_G \bar{d}_{11}^{(r)}(s) p(ds)$$

トナル。 $\bar{D}^{(r)}(s)$ 係 unitary matrix ナル故

$$|\bar{d}_{11}^{(r)}(s)| \leq 1.$$

$$\therefore |\omega^{(r)}| \leq 1$$

(1) (3) ナル H_0 ガ存在シタイト假定スレバ

$$\omega^{(r)} \neq 1$$

トナル。何トナレバ $\omega^{(r)} = 1$ ナレバ $\bar{d}_{11}^{(r)}(s) = 1$ ナル s ノ

$$\text{全体ヲトスレバ } \sum_i |\bar{d}_{1i}^{(r)}(s)|^2 = \sum |\bar{d}_{i1}^{(r)}(s)|^2 = 1$$

$$\text{カラ } \bar{d}_{1i}^{(r)}(s) = \bar{d}_{i1}^{(r)}(s) = 0 \quad (i \neq 1) \text{ トナリ } H \cap G \text{ ノ}$$

closed subgroup トナル。然レニ (14) カラ

$$H \cap E = 0 \text{ ナレバ } p(E) = 0$$

トナリ假定ニ反スル。

(2) 又 (7) ナル H ガタイト假定スレバ

$$|\omega^{(r)}| < 1$$

トナル。何トナレバ $\omega^{(r)} = e^{i\lambda}$ トスレバ $\bar{d}_{11}^{(r)}(\varepsilon) = e^{i\lambda}$
 トナル全体ヲ F トスレバ (14) カラ

$$F \cap E = 0 \quad \text{ナラバ} \quad p(E) = 0$$

トナル。(1) ト同様 =

$$F \ni S \quad \text{ナラ} \quad \bar{D}^{(r)}(\varepsilon) = \begin{pmatrix} e^{i\lambda} & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

ノ形トナリ、 $F \ni S_0$ ヲ任意ニツトスレバ

$$\bar{D}^{(r)}(\varepsilon S_0^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

ノ形トナル。 H 7 $\bar{d}_{11}^{(r)}(\varepsilon) = 1$, S 全体 , ナス closed subgroup トスレバ

$$F \subset S_0 H = H S_0$$

トナリ、(17)ノ假定 = 反スル。

(ii) 一般ノ場合 = $\wedge D_0^{(r)}(p)$, 絶對値 1 , Eigenvalue 7 (重複度ガケ数ハテ) $e^{i\lambda_1^{(r)}}, \dots, e^{i\lambda_m^{(r)}}$ γ
 ($\lambda_j^{(r)} \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$) トスレバ適當ナ unitary matrix U_r = 対シテ (1), (12) ト同様 =

$$(15) \quad U_r^{-1} D_0^{(r)}(p) U = \bar{D}_0^{(r)}(p) = \begin{pmatrix} e^{i\lambda_1^{(r)}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & e^{i\lambda_m^{(r)}} & \\ & & \boxed{*} \end{pmatrix}$$

トナリ

$$\overline{d}_{jj}^{(r)}(s) = e^{i\lambda_j^{(r)}} \quad (j=1, \dots, m_r)$$

トナル $S \in G$, 全体ヲ F トスレバ

$$F \cap E = 0 \quad \text{ナラ} \quad p(E) = 0$$

トナル。且ツ $\boxed{*}$, 部分, *Eigenvalue*, 絶対値ハス
 ヲテ / ヨリトサイ。

$$\overline{D}^{(r)}(s) = U_r^{-1} D^{(r)}(s) U_r = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{*} \end{pmatrix}$$

トナル S / 全体ヲ H トスレバ、 $H \cap G$ / *closed subgroup* トナリ, $S_0 \in F$ ヲ任意ニ一ツ取レバ

$$F = S_0 H = H S_0$$

トナル。今 $\overline{\{S_0 H\}} = G$, トスレバ $E \cap G_1 = 0$ ナラ $p(E) = 0$
 ナル故假定カラ $G_1 = G$ トナリ, $H \cap G$ / *invariant subgroup* トナル。

$$(16) \quad \frac{1}{n} (D_0^{(r)}(p^{(1)}) + \dots + D_0^{(r)}(p^{(n)})) = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(r)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{*} \end{pmatrix}$$

$$\alpha_j^{(r)} = \frac{1}{n} (e^{i\lambda_j^{(r)}} + \dots + e^{i n \lambda_j^{(r)}}) \quad (j=1, \dots, m_r)$$

ナル故 $n \rightarrow \infty$ トスレバ (16) / *matrix* $\rightarrow 0$ ($r=1, 2, \dots$) トナル。故 = *Lemma 1* カラ (6) ハ此ノ場合
 = 成立スル。

(8) がスベテ、Borel set = 對シテ成立スルタメノ充分條件トシテハ

定理 2. E = 無関係ト数 α がアツチ

$$p(E) \geq \alpha m_G(E)$$

が成立スルヲラバ、スベテノ Borel set = 對シテ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p^{(n)}(E) = m_G(E).$$

証明ハ

T. Uno et Y. Hasimoto: Sur le Problème du Battage des Cartes. 数物記事 17, (1935)ヲ真似ルト出来ル。

$$(17) \quad p(E) = m_G(E) + p'(E)$$

ト置ケバ

$$(18) \quad \int p'(s^{-1}E) m_G(ds) = \int m_G(s^{-1}E) p'(ds) = 0$$

ナルコトが (1') ト同様 = *klaar measure, uniqueness* ト $p'(G) = 0$ トカラヲカケル。故ニ $p^{(n)}(E) = \int_G p'^{(n+1)}(s^{-1}E) p'(ds)$ トスレバ (17) ヲ

$$(19) \quad p^{(n)}(E) = m_G(E) + p'^{(n)}(E)$$

modul Γ ヲナス。然ルニ Γ 全体ヲ取レバ H , *faithful representation* トナルカラ Γ ハ H ノスベテノ連続既約表現ヲ含ム。(第182号, 談話797, p. 330. [C''] 参照)

トナル。更 =

$$(20) \quad p'(E) = q(E) - \beta m_G(E), \quad (\beta = 1 - \alpha)$$

トオレバ定理 / 條件カラ

$$q(E) \geq 0, \quad q(G) = \beta$$

トナリ

$$\int_G q(s^{-1}E) m_G(ds) = \int_G m_G(s^{-1}E) q(ds') = \beta^2$$

ガ (18) ト同様 = ワカル。故 = (20) カラ

$$p^{(n)}(E) = q^{(n)}(E) - \beta^n m_G(E)$$

トナリ (19) ト合セテ $q^{(n)}(E) \geq 0$ カラ

$$p^{(n)}(E) = (1 - \beta^n) m_G(E) + q^{(n)}(E) \geq (1 - \beta^n) m_G(E)$$

トナル。一方

$$\begin{aligned} p^{(n)}(E) &= 1 - p^{(n)}(G - E) \leq 1 - (1 - \beta^n) m_G(G - E) \\ &= 1 - (1 - \beta^n)(1 - m_G(E)) = (1 - (1 - \beta)^n) + (1 - \beta^n) m_G(E) \end{aligned}$$

トナルカラ両者合セテ

$$p^{(n)}(E) \longrightarrow m_G(E)$$

トナルコトガワカル。