



Title	Compact 群上ノ Markoff Processニ就イテ
Author(s)	角谷, 静夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1940, 194, p. 94-99
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74778
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

848. Compact 群上 / Markoff Process = 就イテ

角 谷 静 夫 (阪大)

河田, 伊藤西氏ハ compact 群上 / Markoff process = 関シテ大変興味アル結果ヲ証明サレ. 更ニ河田氏ハコノ考ヘヲ使ツテ compact 群ノ Haar / measure ヲ簡單ニ定義スル方法ヲ示サレタ. (談話 846 及ビ 847) 本談話ニ於テハコレヲノ結果ニ對スルニ三ノ注意ヲ與ヘタ.

$p(E)$ ヲ compact 群 G 上ニ定義サレタ任意ノ completely additive, non-negative + 集合函数ニテ $p(G) = 1$ + レモノトシ, $P(x, E) = p(x^{-1}E)$ ニヨツテ G 上ノ Markoff process ヲ定義スル. 先ツ

定理 1 任意ノ G 上ニ定義サレタ連続函数 $f(x) =$ 對シテ $f_n(x) \equiv \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \int_G P^{(m)}(x, dy) f(y)$ ハ $n \rightarrow \infty$ + ルトキニ一様収斂スル.

証明 G 上ニ定義サレタ連続函数 $f(x)$ 全体ノ作ル Banach 空間ヲ $C(G)$ ニテ表ハセバ

$$(\|f\| = \max_{x \in G} |f(x)|) \quad f \rightarrow T(f) = g : g(x) = \int_G P(x, dy) f(y)$$

dy) $f(y)$ ハ明カ = $C(G)$ フソレ自身 = ヲツス

bounded linear operation デ且ツ $\|T\| \leq 1$

シカモ $U_a(f) = g: g(x) = f(ax)$ トオケバ容易一

ワカル如ク、任意ノ $a \in G$ = 對シテ $TU_a = U_aT$ トナル。

ヨツテ、任意ノ $f(x) \in C(G)$ カ G ノ上デ一様連続ナ

ルコトヨリ $f_n = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n T^m(f)$, $n=1, 2, \dots$ ハ G

ノ上デ同程度且ツ一様連続トナル。(何トナレバ $f(x)$ カ

G ノ上デ一様連続ナルコトヨリ、任意ノ $\varepsilon > 0$ = 對シテ G

ノ單位元 e ノ近傍 $U(e)$ カ定マツテ $a \in U(e)$ ノルト

キ $\|U_a(f) - f\| < \varepsilon$. ヲツテ $n=1, 2, \dots$ = 對シテ

$a \in U(e)$ ナルトキ

$$\begin{aligned} \|U_a(f_n) - f_n\| &\leq \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \|U_a(T^m(f)) - T^m(f)\| \\ &= \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \|T^m[U_a(f) - f]\| \leq \|U_a(f) - f\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

ヨツテ Ascoli-Arzelà ノ定理 = ヲリ $\{f_n\}$ ($n=1,$

$2, \dots$) ハ $C(G)$ = 於テ compact トナル。シタガ

ツテ Banach 空間 $C(G)$ = 於ケル mean ergodic

theorem ヲリ $\{f_n\}$ ($n=1, 2, \dots$) ハ一様收斂

スル。(証明終)

$$\text{此ノ如クシテ } C(G) = \text{於テ } \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n T^m \rightarrow T,$$

(strongly) トナルコトガワカツタ。任意ノ $a \in G$ =

對シテ $\Gamma, U_a = U_a \Gamma$, トナルコトハ明カデアアル。

次ニ各々ノ $f(x) \in C(G)$ = 對シテ $\Gamma(f) = g$ ト
オキ. $g(x) = g(e)$ トナル如キ $x \in G$ 全体ノ集合ヲ
 $H(f)$, スベテノ $H(f)$ 共通部分ヲ H_0 = テ表ハス。

定理 2 H_0 ハ G ノ *closed subgroup* デ
アル。

証明 H_0 が *closed* ナルコトハ明カデアアル。ヨ
ツテ $x, y \in H_0$ ナルトキ $x^{-1}, xy \in H_0$ トナルコトヲ示
セバヨイ。

スベテノ $f \in C(G)$ = 對シテ $g(x) = g(y) = g(e)$
(但シ $g = \Gamma(f)$) デアツタトセヨ。 $U_a \Gamma = \Gamma U_a$ ナ
ルコトヨリ、スベテノ $a \in G$ = 對シテ $g(ax) = g(ay)$
 $= g(a)$ トナル。ヨツテ $a = x^{-1}$ トオケバ $g(e) = g(x^{-1})$,
 $a = x$ トオケバ $g(xy) = g(x) = g(e)$ ノ得ル。即
チ $x^{-1}, xy \in H_0$ デアル。

定理 2 = ヨツテ定マル H_0 が河田, 伊藤両氏 = ヨツテ
得ラレタ H_0 ト同ジモノデアアルコトハ殆ド明ラカデアアル。
實際 H_0 が $P^{(n)}(e, H) = 1$, $n = 1, 2, \dots$ ナル如キ
 G ノ *closed subgroup* H ノウチノ最小ナルモノデア
アルコトハ容易ニ示サレル。

特ニ $H_0 = G$ トナル場合が興味カアル。(一般ノ場
合ハ G ノ代リニ H_0 がケヲ考ヘレバヨイ) 例ヘバ任意ノ
 G ノ *open set* U = 對シテ $P^{(n)}(e, U) > 0$ トナル如
キ *integer* n が存在スレバ $H_0 = G$ トナル。

コノトキ極限函数 $g(x)$ ハ G 全体デ常数トナル。コレ
 ハ J. v. Neumann ノ意味ノ $f(x)$ ノ mean = 他
 ナラナイ。特ニ任意ノ G ノ open set U = 對シテ
 $P(e, U) = p(U) > 0$ トナルトキハ $T^n(f)$ が $n \rightarrow \infty$
 ナルトキ一様收斂スルコトガ河田氏ニヨツテ示サレテアル。
 証明ノ方針ハ $T^n(f)$ ノ oscillation が 0 = 收斂ス
 ルコトヲ使フノデアアル。

コノ様ナ $p(E)$ ハ例ヘバ G = 於テ dense ナ可附番
 集合 $D = \{a_n\}$ ($n = 1, 2, \dots$) ヲトリ、コレニ對シ
 テ $p(E) = \sum_{a_n \in E} \frac{1}{2^n}$ トオケバ得ラレルカラ、コレニコッ
 テ Haar ノ measure ノ一ツノ construction が
 與ヘラレタコトナル。

コノ結果ハ J. v. Neumann ノ方法 (Compositio
 Math. I) ト比較スルト大ヘン面白ク思ハレル。

J. v. Neumann ノ方法ニヨレバ任意ノ $f(x) \in C(G)$
 = 對シテ $a_1, a_2, \dots, a_n \in G$ ヲ $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x a_i)$ ノ
 Oscillation が十分小ナリナルヲキニ撰ンデ行ケバ
 Haar ノ measure が求メラレルト云フコトハワカル
 ガ、コノ様ナ $a_1, a_2, \dots, a_n$ ヲ如何ニシテ選ズベキカト
 云フコトハ具體的ニ決定スルコトハ困難デアアル。河田氏ノ方
 法ニヨレバ、實際ニ $p(E)$ ヲ具體的ニ決メルコトが出來
 ルノデアアル。

シカシ、コニデ一ツ注意シタイコトガアル。ソレハ河田

氏ノ場合デモ J. v. Neumann ノ場合デモ Oscillation
 が 0 = 収斂スルトイフコトヲ証明スル必要ガナク、 $\text{norm} (C(G) \text{ノ element トシテ})$ が minimum
 = 収斂スルト云フコトヲ証明スレバ十分ナコトデアアル。

即チ:

定理 3 任意ノ $f(x) \in C(G)$ = 對シテ

$$g(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x a_i) \quad (\alpha_i \in G, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1)$$

[スハ更ニ一般ニ $g(x) = \int_G p(x^{-1} dy) f(y)$, 但シ
 $p(E) \geq 0, p(G) = 1$] ナル形ノ函数 $g(x)$ 全体ノ集合ヲ
 $A(f)$ = テ表ハシ、 $A(f)$ = 属スル函数 $g(x)$ ノ norm
 ノ下限ヲ 求ムトスレバ 求ムハ J. v. Neumann ノイミノ
 mean $M(f)$ = 外ナラヌ。

証明 ハ殆ド明カデアアル。任意ノ $g \in A(f)$ = 對シテ
 $\|g\| \geq M(f)$ トナリ、又任意ノ $\varepsilon > 0$ = 對シテ $\|g\| < M(f)$
 + ε ナル如キ $g \in A(f)$ が存在スルコトモ明カデアアル。コ

ハ $M(f)$ ノ存在ヲ知ツタ上ノ話デアアルが、 $M(f)$ ノ存在ヲ
 豫メ知ラズトモ、同ジコトハ容易ニ証明出来ルノデアアル。

コレハ $A(f)$ が compact ナルコト及び任意ノ $g \in \overline{A(f)}$
 が常數デナケレバ $a_1, a_2, \dots, a_n \in G$ ヲ適當ニトツテ

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(x a_i) \right\| < \|g\| \text{ トナリシメ得ルコトカラ容易ニ}$$

カル。

此ノ如ク考ヘレバ $g(x) \equiv m$ ナル函数ハ convex

compact set $\overline{A(f)}$ / 中デーバン原点 = 近い点トシテ
characterize 出来ル / デアル。コノ様ナ "geomet-
rical" ナ解釋ハ最近ノ *proc. Nat. Acad. Sci.*
U S A. 25(1939) = 発表サレタ *Garrett Birkhoff*
 / *uniformly convex* ナ *Banach* 空間 = 於ケル
semi-group transformation = 関スル *ergodic*
theorem ト比較シテ 見ルト大ヘン面白イト思フ。