OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	An ergodic theorem of Birkhoff - Khintchine's type II
Author(s)	吉田, 耕作
Citation	全国紙上数学談話会. 1940, 195, p. 100-107
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74779
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

849. An ergodic theorem of Birkhoff-Khintchine's type II

吉田 耕作(阪大)

前談話(844)ニハ誤リモアリ[1]，急イデ書イタタメニ色々脱シタ所モアリマシタ。又前ヨリモ所々良クナル様デスカラ今一度始カラ述ベテミマセウ。

定理 Banach 空間 (L^p) ノ (L^p) ヘノ線型寫像 T ガ[2]

(1) $\|T^n\| \leqq$ 常數 C $(n=1,2,\cdots\cdots)$

(2) 全テノ $f\in(L^p)$ ニ對シ，殆ンド到ル所

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} f^{(m)}(t)\right|<\infty,$$

但シ $f^{(n)}=T^n\cdot f$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$，ヲ滿足スルトスル。

コノトキ若シ或ル $g\in(L^p)$ ガ

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}g^{(n)}(t)=0$

almost everywhere.

---

1) **定理** ニ於テ必充條件ト云ッタノハ充分條件ノ誤リデス。從ッテ **証明** ノ初ノ必要ハ明カデアルカラハ餘計デシタ。

2) $f(t)\in(L^p)$ ノ norm ハ $\|f\|=\left(\int_0^1|f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$ デ定義サレル。

(4) $\left\{\left\{\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} g^{(m)}\right\}\right.$ が (L^p) ノ点 g^* ニ弱収斂ス
$\left.\text{ル部分列ヲ含ム.}\right.$

ヲ満足スルトラバ

(5) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} g^{(m)}(t) = g^*(t)$$

almost everywhere

(6) $$\lim_{n\to\infty}\left\| g^* - \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} g^{(m)}\right\| = 0$$

注意 全テノ $f\in(L^p)$ ニ対シテ $\left\|\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} f^{(m)}\right\| \leqq C\cdot\|f\|$
$(n=1,2,\cdots\cdots)$

ガ(1)ヨリ出ルカラ，$p=1$ノトキハ(4)ハ $\left\{\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} g^{(m)}\right\}$ ガ equi-integrable ナ部分列ヲ含ムコトト同等デアル。又 $p>1$ ナラバ(4)ハ餘計ト假定デアル。何者 (L^p) ハ $p>1$ トキ locally weakly compact ダカラ

定理2 Tガ(1)，(2)ノ他ニ

(1)′ $\|T^n\|_M \leqq$ 常数 C' $(n=1,2,\cdots\cdots)$ [1)]

ヲ満足スル十ラバ，全テノ $g\in(L^p)$ ニ対シ(3)，(4)，(5)，(6)ガ全テ成立スル。

定理3 若シモ

脚註1) 次頁へ

(ロ) 各 $g\in(L^p)$ ニ對シ $|g^{(m)}(t)|\leqq G(t)$ $(m=1,2,\cdots\cdots)$ ナル如キ $G\in(L^p)$ 存在ス。

ヲ假定スレバ，全テノ $g\in(L^p)$ ニ對シ (3), (4), (5), (6) ガ成立ツ。 証明ノ爲ニ次ノ Lemma ガ必要ニナル

Lemma 〒ガ (2) ヲ滿足スルトスル。若シ各 $f\in(L^p)$ ニ對シ

$$\tilde{f}(t)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}f^{(m)}(t)-\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}f^{(m)}(t)$$

ヲ定義スルトキ (L^p) カラ type(F) ノ空間 (S)[2] ヘノ寫像(必ズシモ線型カドウカヲカラヌ) $\tilde{T}:\tilde{f}=\tilde{T}\cdot f$ ハ連續デアル。即チ $\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|=0$ カラ

$$\lim_{n\to\infty}\|\tilde{T}\cdot f_n-\tilde{T}\cdot f\|_S=0$$ ヲ得ル。

証明 コノ Lemma ハ Banach-Saks ノ定理トシテ知ラレテヰルモノノ特別ナ場合デアル。併シ Banach ノ書物等ニハ載ツテ居ナイヤウデアルシ，本談話ノ方法ノ

前頁脚註

1) (M) ハ essentially bounded な measurable function ノ作ル Banach 空間。(M) デノ norm ハ $\|f\|_M=\operatorname{essential\,sup}_t|f(t)|$。從ツテ (1)' ハ特ニ〒ガ (M) カラ (M) ヘノ線型寫像ニナッテルコトヲ要求シテル訳デアル。

2) 殆ド到ル所有限ナ可測函數ノ作ル空間。(S) デノ norm ハ $\|f\|_S=\int_0^1\frac{|f(t)|}{1+|f(t)|}dt$ デ定義サレル。norm $\|\ \|_S$ デノ收斂ハ漸近收斂ト同値デアル。

key デアルカラ S. Mazur ト W. Orlicz[1] = 従ッテ proof sketch ヲ書イテオキマス。

$$f_n=\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} f^{(m)}.\quad f_n'(t)=\sup_{m\leqq n}\left|f_m(t)\right|,$$

$f'(t)=\sup_m\left|f_m(t)\right|$ ト置キ (L^p) カラ (S) ヘノ写像 $\nabla_n\cdot f=f_n'$, $\nabla\cdot f=f'$ ヲ考ヘル. 各 ∇_n ハ連続且ツ全テ点 $f\in(L^p)$ ニ於テ $\lim_{n\to\infty}\|\nabla_n\cdot f-\nabla\cdot f\|_S=0$.

従ッテ $\lim_{n\to\infty}\|\frac{1}{k}\nabla_n\cdot f\|_S=\|\frac{1}{k}\nabla\cdot f\|_S$ $(k=1,2,\cdots\cdots)$ ト

$\lim_{k\to\infty}\|\frac{1}{k}\nabla\cdot f\|_S=0$ ニヨリ $(L^p)=\sum_{k=1}^{\infty}G_k$,

$G_k=\mathop{E}_f\left(\|\frac{1}{k}\nabla_n\cdot f\|_S\leqq\varepsilon;\ n=1,2,\cdots\cdots\right)$ ト全テノ $\varepsilon>0$ ニ対シテ分解サレル. ∇_n ノ連続性カラ各 G_k ハ (L^p) ノ開集合. 然シテ (L^p) ハ完備距離空間ダカラ、或ル G_k ハ球ヲ含マネバナラナイ。即チアル点 $f_0\in(L^p)$ ト $\delta>0$ ガ存在シテ $\sup_n\|\frac{1}{k}\nabla_n\cdot f\|_S\leqq\varepsilon$ for $\|f-f_0\|\leqq\delta$ トナラネバナラナイ。所ガ

$$\|\tfrac{1}{k}\nabla_n\cdot(f-f_0)\|_S\leqq\|\tfrac{1}{k}\nabla_n\cdot f\|_S+\|\tfrac{1}{k}\nabla_n\cdot f_0\|_S,$$

$\|\nabla_n\cdot(\frac{1}{k}f)\|_S=\|\frac{1}{k}\nabla_n\cdot f\|_S$ ダカラ n ニ対シ一様ニ

$\lim_{\|f\|\to0}\|\nabla_n\cdot f\|_S=0$. 故ニ $\nabla_n\cdot f$ ハ $f=0$ デ連続且ツ $\nabla\cdot0=0$. 然シテ $\|\widetilde{\nabla}\cdot f\|_S\leqq2\|\nabla\cdot f\|_S$,

$\left|\|\widetilde{\nabla}\cdot f\|_S-\|\widetilde{\nabla}\cdot h\|_S\right|\leqq\|\widetilde{\nabla}\cdot(f-h)\|_S$ ダカラ $\widetilde{\nabla}\cdot f$ ハ

各 $f \in (L^p)$ デ連続デアル。 以上

定理1ノ証 (1) ト (4) トニヨリ g ニ對シテ mean ergodic theorem (6) ガ使ヘル. 故ニ

$\left\{\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} g^{(m)}\right\}$ ハ g^* = 強收斂シ $g^* = T \cdot g^*$,

$g = g^* + (g - g^*)$ ト置クナラバ, $g^{(m)} = g^{(*)} + (g-g^*)^{(m)}$.

$\left\{\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} (g-g^*)^{(m)}\right\}$ ガ 0 ニ強收斂スルンダカラ, (5) ヲ云フニハ

(8) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} (g-g^*)^{(m)}$ ガ almost everywhere ニ存在スルコトヲ云ヘバヨイ。 所ガ $\left\{\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} g^{(m)}\right\}$ ノ g^* ヘノ強收斂カラ

(9) $\lim_{m\to\infty} \left\| (g-g^*) - (E-T)\cdot \frac{mg + (m-1)g^{(1)} + \cdots + g^{(m-1)}}{m} \right\| = 0$ [1]

(3) ニヨリ

(10) $\tilde{T}\cdot \left\{ (E-T) \frac{mg + (m-1)g^{(1)} + \cdots + g^{(m-1)}}{m} \right\} = 0$

$(m = 1, 2, \cdots\cdots)$

ダカラ, (9), (10) ト Lemma ニヨリ $\tilde{T}\cdot(g-g^*) = 0$ 即チ (8) ガ得ラレタ。

定理2ノ証 (1)′ ニヨリ (3), (4) ガ全テノ $g \in (L^p)\cdot(M)$ ニ對シテ成リ立ツ。 從ツテ定理1ニヨリ (5) ガ全テノ $g \in (L^p)\cdot(M)$ ニ対シテ成立ツ。 所ガ (M) ハ norm $\| \|$ ノ意味デ (L^p)

1) E ハ單位寫像

dense ヂカラ Lemma = ヨリ，(5) ガ全テ $g\in(L^p)$ ニ對シテ成立ツ，mean ergodic theorem (6) ノ方ハ (4) ガ $g\in(L^p)\cdot(M)$ ニ對シテ成立ツコトト，(M) ガ (L^p) デ dense ナコトカラ出ル。

定理3ノ証 (7) ニヨリ (1) ノ滿足サレテルコトガワカル（Banach ノ定理！）．又 (7) ニヨリ (2), (3), (4) モ全テノ $g\in(L^p)$ ニ對シテ滿足サレテルカラ，定理1ニヨリ，定理3ヲ得ル．証了。

Birkhoff-Khintchine ノ定理ヲ定理2ヨリ導クコト

P ヲ $(0,1)$ ノ $(0,1)$ ヘノ one-to-one[1] 且ツ equi measure ナ変換トセヨ。$f\in(L^p)$ ニ對シ $f^{(1)}$, $f^{(1)}(t)=f(P\cdot t)$ ヲ對應サセル線型寫像 T ヲ考ヘル。T ガ (1), (1)', (4) ヲ滿足シテヲルコトハ明カデアル。又 N. Wiener[2] ニヨレバ non-negative ナ函數 $f(t)\in(L^p)$ ニ對シ

$$(10)\quad \begin{cases} mes\left(E_t\left(\overline{f(t)}>\lambda\right)\right)\leqq\dfrac{1}{\lambda}\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt, \\ \overline{f}(t)=\sup_n\left\{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{m=1}^{n} f^{(m)}(t)\right\}, \\ \lambda>0 \text{ ナル任意常数}. \end{cases}$$

故ニ (2) モ亦滿足サレテル．故ニ定理2ニヨリ全テノ

---

1) measure 0 ヲ除イテ one-to-one

2) Duke Math. J. 5 (1939), 1–18.

$f\in(L^p)$ ニ對シ (3), (5), (6) ガ成立ツ。之レデ B−K ergodic theorem ガ得ラレル。

注意 角谷氏ニヨレバ, equi-measure 点変換ノ場合ハ次ノ如クシテ、non-negative + $f\in(L^p)$ ニ対シ(3)ノ成立ツコトガ云ヘル。從ツテ定理1ヨリモ直接 B-K ergodic theorem ガ得ラレル。

$$E_m^{(n)}(\alpha)=E_t\left(m\alpha\leqq g^{(n)}(t)<(m+1)\alpha\right),\ (n=1,2,\cdots\cdots)$$

トヲケバ

$$E_{k,l;m}(\alpha)=E_t\left(\alpha\leqq\frac{g^{(n)}(\alpha)}{n}<(m+1)\alpha;\ n=k,k+1,\cdots,l\right)\leqq\sum_{n=k}^{l}\sum_{i=n}^{nm}E_i^{(n)}(\alpha).$$

Pガ equi-measure ダカラ $mes(E_i^{(n)}(\alpha))$ ハ n ニ無関係。ヨッテ

$$mes\left(E_{k,l;m}(\alpha)\right)\leqq\sum_{n=k}^{l}\sum_{i=n}^{nm}mes\left(E_i^{(1)}(\alpha)\right)$$

$$\leqq\sum_{j=k}^{\infty}j\,mes\left(E_j^{(1)}(\alpha)\right)\leqq\frac{1}{\alpha}\int_{g^{(1)}(t)\geqq k\alpha}g^{(1)}(t)\,dt$$

ヲ得ル。故ニ $\lim_{k\to\infty}\left(E_t\left(\left(\sup_{n\geqq k}\frac{g^{(n)}(t)}{n}\right)\geqq\alpha\right)\right)=0$ 即チ(3)ハ証明サレタ。

前談話ニ述ベタ如ク Wiener ハ(10)ト mean ergodic theorem ヨリ B−K ergodic theorem

ヲ証明シタ。我々ノ方法ハ，之ノ equi-measure デナイ場合ヲモ含ムヤウナ，operator-theoretical extension トデモ云ヘルデアリマセウ。大体 almost everywhere ナ収斂ヲ問題トシテルノデスカラ operator デヲ考ヘルノガ自然ナノデハアリマスマイカ。