



Title	Radó-Hall-Maak ノ定理ノ擴張 及ビ ソノ Haar measure ノ問題ヘノ應用 I
Author(s)	角谷, 静夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1940, 195, p. 107-118
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74780
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

850. Radó-Hall Maackノ定理ノ擴張
及ビ γ ノ Haar measureノ問題へ
ノ應用 I

角谷 静夫 (阪大)

Radó, Hall 及ビ Maackノ次ノ定理ヲ証明
シタ。¹⁾

定理 I 集合 G ヲ二通りノ方法デ n 個ノ部分ニ分
割スルトキ、若シ任意ノ γ ($1 \leq \gamma \leq n-1$)ニ對シテ
一方ノ γ 個ガ他方ノ $(\gamma+1)$ 個ヲ決シテ含マナイナラ
バ、コレヲノニツノ分割カラ共通ノ代表点ヲ選ブコトガ出
来ル。

即チ、今 G ヲ次ノ如ク二通りニ分割シタトキ:

(1) 証明ノ例ヘハ H. Zassenhaus: *Lehrbuch der Gruppentheorie*, 第一卷, 1937, pp. 11-12 参照。

$$G = A_1 + A_2 + \dots + A_n, \quad A_i \neq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$$A_{i_1} \cdot A_{i_2} = 0 \quad (i_1 \neq i_2) = B_1 + B_2 + \dots + B_n,$$

$$B_j \neq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad B_{j_1} \cdot B_{j_2} = 0 \quad (j_1 \neq j_2)$$

若し、次の如き形の条件 ($1 \leq r \leq n-1$):

$$A_{i_1} + A_{i_2} + \dots + A_{i_r} \supset B_{j_1} + B_{j_2} + \dots + B_{j_{r+1}}$$

$$(1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n; 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_{r+1} \leq n)$$

$$A_{i_1} + A_{i_2} + \dots + A_{i_{r+1}} \subset B_{j_1} + B_{j_2} + \dots + B_{j_r}$$

$$(1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{r+1} \leq n; 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_r \leq n)$$

1何れノ一ツモ成立シテイテラバ、 $\{1, 2, \dots, n\}$ ノ適當+ permutation $\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ 及ビ $\{j_1, j_2, \dots, j_n\}$ ヲ選ンテ $A_{i_k} \cdot B_{j_k} \neq 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n)$ トナルヨリ = スルコトガ出来ル。

W. Maak ハコノ定理ヲ巧妙ニ使用シテ、一般ノ group $G =$ 於ケル J. v. Neumannノ意味ノ almost periodic function $f(x) =$ 對シテ、 \forall mean が存在スルコトヲ証明シタ。⁽²⁾ 特ニ group G が compact, separable テアツテ且ツ $f(x)$ が $G =$ 於ケル連続函数デアール場合ヲ考ヘルト、コノ meanノ存在ハ G ノ Haarノ measureノ存在ト同等デアール⁽³⁾カラ、

(2) W. Maak: Eine neue Definition der fast periodischen Funktionen, Abh. Hansisch. Univ.,

11 (1936), 240.

(脚註(3)ハ次頁へ)

コノ定理 / ヲ使フコト = ヨツテ *compact, separable* +
group $G = \text{Haar}$ / *measure* が存在スルコトが証
 明サレタコト = ナル。(4)

本談話 = 於テハ、同様 + *principle* = ヨツテ、一
 般 / *locally bicomact* + *group* $G = \text{Haar}$
 / *measure* が存在スルコトヲ証明シタイ。

コノタメ = ハ先ツ定理 / = 於ケル G / 分割が有限個
 デナイ場合ヲ論ジ + ケレバナラナイ。ソレハ *locally bi-*
compact + *group* G ハ *closure* が *bicomact*
 + *open set* / 有限個ヲモツテ覆フコトハ必ずシモ出
 来 + イカラデアナル。

本談話 = 於テハ定理 / 7次 / 形 = 拡張スル:

定理 2 $\mathcal{A} = \{A_i\}$, ($i = 1, 2, \dots, m$; $A_i \neq 0$
 ($i = 1, 2, \dots, m$) $A_{i_1} \cdot A_{i_2} = 0$, ($i_1 \neq i_2$) 及ビ
 $\mathcal{B} = \{B_j\}$ ($j = 1, 2, \dots, n$; $B_j \neq 0$ ($j = 1, 2, \dots, n$)
 $B_{j_1} \cdot B_{j_2} = 0$, ($j_1 \neq j_2$)) 7 集合 G / *disjoint* + 部分
 集合 / ニツ / *system* トスル。(5)

然ルトキハ、若シ \mathcal{A} / 如何ナル r 個 / 集合 / 和集合 \in

(3) J. v. Neumann: Zum Haarschen Mass
 in Topologischen Gruppen, *Compositio*
math. 1

(4) コノ結果ヲ G が (必ずシモ *separable* デナイ) *bicomact*
group デアル場合 = 拡張スルコトハ容易デアナル。

(5) 必ずシモ $m = n$ ト假定シテ。又 $A_i \cdot B_j \neq 0$ トナルカモシレナイ。

G の $(r+1)$ 個ノ集合ヲ含マズ、又逆ニ G ノ如何ナル r 個ノ集合ノ和集合モ G ノ $(r+1)$ 個ノ集合ヲ含マナイト
 スレバ $(1 \leq r \leq \min(m, n) - 1)$ $B_1 + B_2 + \dots + B_n$
 = 含マレルスベテノ A_i 及ビ $A_1 + A_2 + \dots + A_m =$ 含マ
 レルスベテノ B_j カラ共通ノ代表点ヲエラビ出スコトが出来
 ル。

即チ、若シ次ノ如キ形ノ條件:

$$(1) \quad A_{i_1} + A_{i_2} + \dots + A_{i_r} \supset B_{j_1} + B_{j_2} + \dots + B_{j_{r+1}}$$

$$(1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq m;$$

$$1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_{r+1} \leq n)$$

$$(2) \quad A_{i_1} + A_{i_2} + \dots + A_{i_{r+1}} \subset B_{j_1} + B_{j_2} + \dots + B_{j_r}$$

$$(1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{r+1} \leq m;$$

$$1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_r \leq n)$$

ノ何レノ一ツモ満足サレテ平ナイトラバ、 S 個ノ集合ヲリト
 ルニツノ system $\{A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_S}\}$ ($1 \leq i_1 <$
 $i_2 < \dots < i_S \leq m$), $\{B_{j_1}, B_{j_2}, \dots, B_{j_S}\}$
 ($1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_S \leq n$) ($0 \leq S \leq \min(m, n)$) ヲ
 選ンテ $A_{i_k} \cdot B_{j_k} \neq 0$ ($k = 1, 2, \dots, S$) = テ且ツ
 $i \neq i_k, j \neq j_k$ ($k = 1, 2, \dots, S$) + ルトキ
 $A_i \not\subset B_1 + B_2 + \dots + B_n, B_j \not\subset A_1 + A_2 + \dots + A_m$ ト
 ナル様ニスルコトが出来ル。

注意1 $m = n = r$ 且ツ $G = A_1 + A_2 + \dots + A_n$
 $= B_1 + B_2 + \dots + B_n$ + ルトキハ定理2ハ定理1 =
 reduce サレル。

注意2 $B_1 + B_2 + \dots + B_n =$ 含マレル A_i / 数
ト $A_1 + A_2 + \dots + A_m =$ 含マレル B_j / 数トハ必ずシモ
一致シナイ。

証明 *Mathematical induction* = ヨル。

$m=1$ 又ハ $n=1$ ナルトキ定理2ハ確カニ正シイ。

ヨツテ (m, n) ナル場合ノ定理2ノ証明ハ (m', n')

$(m' \leq m, n' < n$ 又ハ $m' < m, n' \leq n)$ ナル場合 =
reduce スルコト = ヨツテ完結サレル。

我々ハコノ *reduction* ナ次ノ三ツノ場合ニ分ケテ
遂行スル。

Case 1. 或ル r ($1 \leq r \leq \min(m, n)$, 但
シ $r = m = n$ ナル場合ハ除ク) = 對シテ

$$(3) A_{i_1} + A_{i_2} + \dots + A_{i_r} \supset B_{j_1} + B_{j_2} + \dots + B_{j_r}$$

$$(1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq m,$$

$$1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_r \leq n)$$

が成立スルトキ

Suffix ナツケカヘルコト = ヨツテ (3) 式ハ實ハ

$$(4) A_1 + A_2 + \dots + A_r \supset B_1 + B_2 + \dots + B_r$$

デアルト考ヘテモ一般性ヲ失ハナイ。コノトキハ

$$(5) A'_i = A_i - A_i (B_{r+1} + B_{r+2} + \dots + B_n)$$

$$i = 1, 2, \dots, r$$

$$(6) B'_j = B_j - B_j (A_1 + A_2 + \dots + A_r)$$

$$j = r+1, r+2, \dots, n$$

トオキ、此クノ如クシテ得ラレル二組ノ $system \{A'_1, A'_2, \dots, A'_r; B_1, B_2, \dots, B_r\} \{A_{r+1}, A_{r+2}, \dots, A_m; B'_{r+1}, B'_{r+2}, \dots, B'_n\}$ ヲ考ヘシ。 $r=m$ 又ハ $r=m$ ナルトキハ後者ノ A 又ハ B' ガナクナルケレドモ、ソノトキハ後者ノ $system$ ヲ考ヘズ前者ノ $system$ ガケ考ヘルコトニスル。 $r=m=n$ ナル場合ハ (3) ノ假定ニ除外サレテキルカラ、コノ様ニシテ得ラレタ二組ノ $system$ ノ各々ニ對シテ定理 2 ノ條件ガ満足サレテキルコトヲ証明スレバ、所要ノ $reduction$ ガ得ラレタコトニナル。 コノタメニ我々ハ次ノ事實ヲ証明シナケレバナラナイ:

$$(9) \quad A'_i \neq 0 \quad \text{for } i=1, 2, \dots, r.$$

$$(8) \quad B'_j \neq 0 \quad \text{for } j=r+1, r+2, \dots, n$$

(if $n > r$)

$$(9) \quad A'_i \subset B_1 + B_2 + \dots + B_n \rightarrow A'_i \subset B_1 + B_2 + \dots + B_r$$

($i=1, 2, \dots, r$)

$$(10) \quad B'_j \subset A_1 + A_2 + \dots + A_m \rightarrow B'_j \subset A'_1 + A'_2 + \dots + A'_r$$

($j=1, 2, \dots, r$)

$$(11) \quad A'_i \subset B_1 + B_2 + \dots + B_n \rightarrow A'_i \subset B'_{r+1} + B'_{r+2} + \dots + B'_n$$

($i=r+1, r+2, \dots, m$)

$$(12) \quad B'_j \subset A_1 + A_2 + \dots + A_m \rightarrow B'_j \subset A_{r+1} + A_{r+2} + \dots + A_m$$

($j=r+1, r+2, \dots, n$)

(6) コノ條件ハ (4) = $\exists j=1, 2, \dots, r$ ナシテ確カニ満足サレテキル。

(13) 次ノ如キ形ノ條件ハ何レノ一ツモ成立シテイ。

$$(13a) \quad A'_{i_1} + A'_{i_2} + \dots + A'_{i_p} \supset B_{j_1} + B_{j_2} + \dots + B_{j_{p+1}}$$

$$(1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq r;$$

$$1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_{p+1} \leq r)$$

$$(13b) \quad A'_{i_1} + A'_{i_2} + \dots + A'_{i_{p+1}} \subset B_{j_1} + B_{j_2} + \dots + B_{j_p}$$

$$(1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{p+1} \leq r;$$

$$1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_p \leq r)$$

$$(13c) \quad A_{i_1} + A_{i_2} + \dots + A_{i_p} \supset B_{j_1} + B_{j_2} + \dots + B_{j_{p+1}}$$

$$(r+1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq m;$$

$$r+1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_{p+1} \leq n)$$

$$(13d) \quad A_{i_1} + A_{i_2} + \dots + A_{i_{p+1}} \subset B'_{j_1} + B'_{j_2} + \dots + B'_{j_p}$$

$$(r+1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{p+1} \leq m;$$

$$r+1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_p \leq n)$$

(7)ノ証明 $\exists \nu \ 1 \leq i \leq r + \text{ル } i = \text{對シテ}$

$A'_i = 0$ トナツタトスレバ (5) = ヨリ $A_i \subset B_{r+1} + B_{r+2}$

+ + B_n . シタガツテ (4) = ヨツテ $A_1 + A_2 + \dots$

+ $A_{i-1} + A_{i+1} + \dots + A_r \supset B_1 + B_2 + \dots + B_r$. コ

レハ (1) カ決シテ成立シテイト云フ假定ニ反スル。

(8)ノ証明 $\exists \nu \ r+1 \leq j \leq n$ +ル $j = \text{對シテ}$

$B'_j = 0$ トナツタトスレバ (6) = ヨツテ $B_j \subset A_1 + A_2 + \dots$

$\dots + A_r$. シタガツテ (4) = ヨリ $A_1 + A_2 + \dots + A_r \supset B_1 + B_2 + \dots + B_r + B_j$. コレハ (1) が決シテ成立シタイト云フ假定 = 反スル.

(9) / 証明 $A'_i \subset A_i$, $i = 1, 2, \dots, r$ ヨリ明カ.

(10) / 証明 $1 \leq j \leq r + 1$ ヲバ (4) ヨリ $B_j \subset A_1 + A_2 + \dots + A_r$ ヨツテ $B_j \subset (A_1 + A_2 + \dots + A_r) - (A_1 + A_2 + \dots + A_r)(B_{r+1} + B_{r+2} + \dots + B_n) = A'_1 + A'_2 + \dots + A'_r$.

(11) / 証明 $A_i \subset B_1 + B_2 + \dots + B_m$ ($r+1 \leq i \leq m$) ヲバ $A_i \subset (B_1 + B_2 + \dots + B_n) - (B_1 + B_2 + \dots + B_n)(A_1 + A_2 + \dots + A_r) = B'_{r+1} + B'_{r+2} + \dots + B'_n$

(12) / 証明 $B'_j \subset B_j$, $j = r+1, r+2, \dots, n$ ナルコトヨリ明カ.

(13) / 証明 ϵ シ (13a) 又ハ (13d) が成立スレバ $A_{i'} \subset A_i$ ($1 \leq i' \leq r$), $B'_{j'} \subset B_j$ ($r+1 \leq j' \leq n$) ナルコトヨリ

$$A_{i_1} + A_{i_2} + \dots + A_{i_p} \supset B_{j_1} + B_{j_2} + \dots + B_{j_{p+1}}$$

$$(1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq r \leq m;$$

$$1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_{p+1} \leq r \leq n)$$

$$A_{i_1} + A_{i_2} + \dots + A_{i_{p+1}} \subset B_{j_1} + B_{j_2} + \dots + B_{j_p}$$

$$(1 \leq r+1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{p+1} \leq m;$$

$$1 \leq r+1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_p \leq n)$$

トナリ、(1), (2) が決シテ成立シタイト云フコト = 矛盾スル。

次ニモシ (13b) が成立シタトセヨ。

$$(13b') \quad A'_1 + A'_2 + \dots + A'_{p+1} \subset B_1 + B_2 + \dots + B_p, \\ 1 \leq p < r$$

デアルト假定シテモ一般性ヲ失ハナイ。然ルニ他方(4)及ビ(5)ヨリ

$$A'_1 + A'_2 + \dots + A'_r \supset B_1 + B_2 + \dots + B_r$$

ハ明カニ成立スルカラ、コノ式ノ両辺ヨリ (13b') ノ両辺ヲ引ケバ

$$A'_{p+2} + A'_{p+3} + \dots + A'_r \supset B_{p+1} + B_{p+2} + \dots + B_r$$

ヨツテ $A'_i \supset A'_i$ ($1 \leq i \leq r$) ナルコトヨリ

$$A_{p+2} + A_{p+3} + \dots + A_r \supset B_{p+1} + B_{p+2} + \dots + B_r$$

コレハ (1) が決シテ成立シタイト云フ假定 = 矛盾ヲスル。

最後ニ (13c) が成立シタトスレバ、コノ両辺 = (4) ノ両辺ヲ加ヘルコトニヨリ

$$A_1 + A_2 + \dots + A_r + A_{i_1} + A_{i_2} + \dots + A_{i_p} \supset B_1 \\ + B_2 + \dots + B_r + B'_{j_1} + B'_{j_2} + \dots + B'_{j_{p+1}}$$

ヨツテ (6) ヨリ 右辺ノ タツシユ ヲ取り去ルコトが出来テ

$$A_1 + A_2 + \dots + A_r + A_{i_1} + A_{i_2} + \dots + A_{i_p} \supset B_1 \\ + B_2 + \dots + B_r + B_{j_1} + B_{j_2} + \dots + B_{j_{p+1}}$$

コノ (1) が決シテ成立セヌト云フ假定 = 矛盾スル。

Case 2. 或ル r ($1 \leq r \leq m$, 但シ $m = n = r +$
ル場合ヲ除ク) = 対シテ

$$(14) A_{i_1} + A_{i_2} + \dots + A_{i_r} < B_{j_1} + B_{j_2} + \dots + B_{j_r}$$

$$(1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq m;$$

$$1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_r \leq n)$$

トナルトキ

コノ場合ハ Case 1 ト全ク同様 = 論ジラレル。

Case 3. (3) 又ハ (14) ノ如キ形ノ關係が決シテ
成立シナイトキ

コノトキハ任意 = A_i, B_j ヲ $A_i \cdot B_j \neq 0$ ナル如ク選バ
(カナル A_i, B_j ノ pair が存在シナイトキハ定理ハ明カ
= 成立スル) $A_1 \cdot B_1 \neq 0$ デアルト假定シラセ一般性ヲ失
ハナイ。次 =

$$(15) A'_i = A_i - A_i \cdot B_1, \quad i = 2, 3, \dots, m$$

$$(16) B'_j = B_j - A_1 \cdot B_j, \quad j = 2, 3, \dots, n$$

トオキ $\{A'_2, A'_3, \dots, A'_m; B'_2, B'_3, \dots, B'_n\}$ ナル
system ヲ考ヘル。定理 2 がコノ system ノ場合 =
reduce ナルコトヲ証明スレバヨイ。コノ \times = n 次
ノ事實ヲ証明スレバヨイ。

$$(17) A'_i \neq 0 \quad \text{for } i = 2, 3, \dots, m$$

$$(18) B'_j \neq 0 \quad \text{for } j = 2, 3, \dots, n$$

$$(19) \quad A_i \subset B_1 + B_2 + \dots + B_n \rightarrow A'_i \subset B'_2 + B'_3 + \dots + B'_{i-1}$$

($i = 2, 3, \dots, m$)

$$(20) \quad B_j \subset (A_1 + A_2 + \dots + A_m) \rightarrow B'_j \subset A'_2 + A'_3 + \dots + A'_m$$

($j = 2, 3, \dots, n$)

(21) 次ノ如キ形ノ條件ハ何レノ一ツモ成立シタイ:

$$(21a) \quad A'_{i_1} + A'_{i_2} + \dots + A'_{i_p} \supset B'_{j_1} + B'_{j_2} + \dots + B'_{j_{p+1}}$$

$$(2 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq m;$$

$$2 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_{p+1} \leq n)$$

$$(21b) \quad A'_{i_1} + A'_{i_2} + \dots + A'_{i_{p+1}} \subset B'_{j_1} + B'_{j_2} + \dots + B'_{j_p}$$

$$(2 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{p+1} \leq m;$$

$$2 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_p \leq n)$$

(19)ノ証明 $2 \leq i \leq m$ ナル $i =$ 對シテ $A'_i = 0$

トナツタトスレバ (15)ヨリ $A'_i \subset B_1$. コレハ (14)ノ如キ形ノ關係ガ決シテ成立シタイト云フコトニ矛盾スル.

(18)ノ証明 (17)ノ証明ト同様.

(19)(20)ノ証明 明らか.

(21)ノ証明 (21a)ガ、モシ成立シタトスレバ

$A_i \supset A'_i$ ($i = 2, 3, \dots, m$) ナルコトヨリ

$$A'_{i_1} + A'_{i_2} + \dots + A'_{i_p} \supset B'_{j_1} + B'_{j_2} + \dots + B'_{j_{p+1}}$$

ヨツテ

$$A_1 + A_{i_1} + A_{i_2} + \dots + A_{i_p} \supset B'_{j_1} + B'_{j_2} + \dots + B'_{j_{p+1}}$$

ノ定義(16)ヨリ右辺ノ ダッシュガトレテ

$$A_1 + A_{i_1} + A_{i_2} + \dots + A_{i_p} \supset B_{j_1} + B_{j_2} + \dots + B_{j_{p+1}}$$

コレハ (3)ガ決シテ成立シ+イト云フコト=矛盾スル。

(2/2)ガ決シテ成立シ+イトモ全ク同様ニシテ示サレ

ル。 (定理2ノ証明終)

(ツツク)