



Title	一様位相空間ニ就イテ I
Author(s)	小平, 邦彦
Citation	全国紙上数学談話会. 1940, 196, p. 119-139
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74781
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

851. 一樣位相空間 = 就イテ, 1

小平 邦彦 (東京)

1. 一般距離空間ト一樣位相空間、多クノ距離函数 (quasi-metric) $\rho_k(p, q)$ ノ定義サレテキル空間 X ヲ考ヘル。

(1) $\mathcal{U}_{k_1, k_2, \dots, k_l, \varepsilon}(p) = \{q; \rho_{k_j}(q, p) < \varepsilon, 1 \leq j \leq l\}$ トオキ, $k_1, k_2, \dots, k_l \in +\infty$ index ツーツ = マトメテ α ト書ケバ, $\mathcal{U}_\alpha(p)$ ハ次ノ條件:

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} 1^\circ \quad q \in \mathcal{U}_\alpha(p) \text{ 十ラバ } p \in \mathcal{U}_\alpha(q), \\ 2^\circ \quad \alpha, \beta = \text{對シテ } \gamma \text{ が定マツテ,} \\ \mathcal{U}_\gamma(p) \subset \mathcal{U}_\alpha(p) \cap \mathcal{U}_\beta(p), \\ 3^\circ \quad \alpha = \text{對シテ } \beta \text{ が定マツテ } p \in \mathcal{U}_\beta(q), \\ q \in \mathcal{U}_\beta(r) \text{ 十ラバ } p \in \mathcal{U}_\alpha(r); \end{array} \right.$$

ヲ満足スル。A. Weil¹⁾ ハ更ニ

4^o $q \neq p$ 十ラバ $\mathcal{U}_\alpha(q)$ 中 p 十ル α ガアル。十ル條件ヲ考ヘ, 1^o 4^o 十ル條件ヲ満足スル「近傍系」 $\{\mathcal{U}_\alpha(p)\}$ ヲ système uniforme de voisinages ト名付ケ, コノ様ナ近傍系ヲ有スル空間ヲ espace uniforme ト名付ケタ。吾々ハ條件 4^o ヲ保証シテ, 1^o 2^o 3^o 十ル條件ヲ満足スル空間ヲ一樣位相空間

1) A. Weil: Sur les espaces à structure uniforme et sur la Topologie générale.

間ト呼ブコト = スル。一様位相空間 = 於テ

$$(3) \quad \mathcal{G} \in \prod_{\alpha} \mathcal{U}_{\alpha}(p)$$

ナル = 点 p , $\mathcal{G}$ ヲ *identifizieren* シテ得ラレル²⁾ 空間
ヲ $\bar{\mathcal{U}}$, 對應スル点, 及ビ近傍ヲ $\bar{p}$, $\bar{\mathcal{U}}_{\alpha}(\bar{p})$ デ現ハセバ,
 $\bar{\mathcal{U}}$ ハ $\bar{\mathcal{U}}_{\alpha}$ ヲ近傍系トスル *espace uniforme* トナル。³⁾
 $\bar{\mathcal{U}}_{\alpha}(\bar{p})$ ハ明ラカニ 4° ヲ満足スルカラデアアル。特ニ近傍系
ガ (1) デ導ヘラレル *espace uniforme* ヲ一般距離空間
ト呼ブ。

一様位相空間ハ $\{ \mathcal{U}_{\alpha}(p) \}$ ヲ近傍系トスル位相空間デア
アル。コノ意味デ *offen*, *geschlossen*, 連続性, etc.
ガ定義サレル。^{*}

一様位相空間デハ又一様連続性が定義サレル。スナハ
チ $\mathcal{U}$ ヲ $\mathcal{U}'$ ノ中ヘ寫ス寫像 f ハ與ヘラレタ $\mathcal{U}'_{\alpha} = \mathcal{U}_{\alpha}$ 對シテ,
 β ヲ適當ニ選ンデ p ノ如何ニ関セズ

$$(4) \quad f(\mathcal{U}_{\beta}(p)) \subset \mathcal{U}'_{\alpha}(f(p))$$

ナラシメ得ルトキ, f ハ 一様連続デアルトイフ。特ニ f ガ
一對一デアツテ, f ト f^{-1} ガ共ニ一様連続ナトキ, f ハ一様
位相的デアルトイヒ, 一相位相的ト変換 f デ不変ト性質ヲ一
様位相的ト性質トヨブ。

2) (3) ナル p ト $\mathcal{G}$ ノ關係ハ, 1° 2° 3° = ヨツテ, 同値律ヲ満足シ
テキルコトガ容易ニ證メラレル。

3) $\bar{\mathcal{U}}$, 一様位相的性質ハスベテ $\bar{\mathcal{U}}$ ノ性質ニ帰着セシメラレル。

* 集合 A , *abgeschlossene Hülle* (= *Berührungsmenge*)
ヲ $A^{\bar{}}$ デ現ハスコト = スル。

A. Weil は $\{\mathcal{U}_\alpha(p)\}$, 定メル空間ノ一様位相的+性
 質ノ全体ヲ, uniform structure ト名付ケタ. 吾々
 ハコレヲ一様位相トヨブコト=スル. $\{\mathcal{U}_\alpha(p)\}$ ト
 $\{\mathcal{V}_\alpha(p)\}$ +ルニツノ近傍系ハ, 同ジ一様位相ヲ與ヘルトキ
 同値⁴⁾デアレトイフ.

空間ノ近傍系ガ(1) +ル形=與ヘラレテキルトキ, (ρ_k)
 ヲ空間ノ距離函數系トヨブ. コノトキ $\mathcal{R}$ ヲ $\mathcal{R}'$ ヘ寫ス寫像
 f ガ一様連続ナルタメノ必要且ツ充分ノ條件ハ, 與ヘラレタ
 ρ'_k 及ビ $\varepsilon' > 0$ = 對シテ $k_1, k_2, \dots, k_l, \varepsilon > 0$ ヲ適當
 = 選ンデ

$$(5) \quad \rho_{k_j}(p, q) < \varepsilon, \quad 1 \leq j \leq l \quad \text{+ラバ}$$

$$\rho'_k(f(p), f(q)) < \varepsilon'$$

+ラシメ得ル事デアル.

ニツノ距離函數系ハ對應スル近傍系ガ同値ナレトキ,
 同値デアルトイツ. 對應スル近傍系=ヨツテ定メラレル空間
 ノ一様位相ヲ, 距離函數系=ヨツテ定メラレタ一様位相
 トヨブ.

A. Weil ハ, スベテ一様位相ハ適當ノ距離函數系=
 ヨツテ與ヘラレルコトヲ示シタ.⁴⁾

$\mathcal{U}_\alpha$ ヲ各点 p = 對シテ $\mathcal{U}_\alpha(p)$ +ル集合ヲ對應サセル
 function ヲ現ハスモノト考ヘルコトが出来ル. コノ意
 味デ, $\mathcal{R}$ ノ任意ノ部分集合 A = 對シテ

$$(6) \quad \mathcal{U}_\alpha(A) = \sum_{p \in A} \mathcal{U}_\alpha(p)$$

4) A. Weil 1)

トオク。更ニ

$$(7) \mathcal{U}_\alpha \cdot \mathcal{U}_\tau(p) = \mathcal{U}_\alpha(\mathcal{U}_\tau(p))$$

ニヨツテニツノ function $\mathcal{U}_\alpha$ ト $\mathcal{U}_\tau$ ノ積 $\mathcal{U}_\alpha \cdot \mathcal{U}_\tau$ ヲ定義スル。⁵⁾ コノ記法ヲ使ヘバ一様位相空間ノ條件 3° ハ次ノ如ク現ハサレル:

(8) 各 $\mathcal{U}_\alpha =$ 對シテ $\mathcal{U}_\beta^2(p) \subset \mathcal{U}_\alpha(p) + \mathcal{U}_\beta$ が存在スル。吾々ハ一般ニ、スベテノ $p =$ ツイテ

$$\mathcal{U}_\tau(p) \subset \mathcal{U}_\alpha(p)$$

ナルトキ

$$(9) \mathcal{U}_\tau \subset \mathcal{U}_\alpha$$

ノ如ク書ク事ニスル。⁶⁾

2. Vollständigkeit. „espace uniforme”
ノ完全性ヲ論ズル方法ハニツアル。一ツハ A. Weil ノ Cauchy family ヲ用ヒル方法、一ツハ G. Birkhoff ノ所謂 Moore-Smith convergence¹⁾ ヲ用ヒル方法デアアル。コノデコノニツノ方法ノ關係ヲ示シ、コレヲ併用スルコトニヨツテ幾分議論ガ簡單ニナルコトヲ示ス。——
コノ Nr. デハ espace uniforme (4°) ヲ満足スル一様

5) A. Weil ハ $\mathcal{U}_\alpha$ ヲ集合トシテ現ハシタ。

6) 同上

D G. Birkhoff: Moore-Smith convergence in general topology
Graves: On the completing of a Hausdorff space

位相空間)ノミヲ考ヘ、コレヲ一般ニ $\mathcal{R}$ デ現ハスコト
ニスル。

G. Birkhoff = 依ツテ 條件

(d) 任意ノ $\lambda, \mu \in (\lambda)$ ニ對シテ、 $\lambda < \nu, \mu < \nu$ ナ
ル $\nu \in (\lambda)$ ガアル。

ヲ満足スル *partially ordered set* ヲ *d. S. (directed set)* ト名付ケ、*d. S. (λ)* ヲ *index* トスル点集合
(p_λ) ヲ *d. S. p. (directed set of point)* トヨ
ブ。任意ノ点集合 (α) ガ與ヘマレタトキ、(α)ノ有限部
分集合 $\Lambda, M, \text{etc.}$ ノ全体ヲ考ヘ、 $\Lambda \subset M$ ノトキ $\Lambda < M$
ト定義スレバ、(Λ)ハ *d. S.* トナル。コレヲ (α)カラ導ビカ
レタ *d. S.* トヨブ。

$\mathcal{R}$ ノ点カラ成ル *d. S. p. (p_λ)* ヲ考ヘル。任意ノ α
ヲ與ヘタトキ、適當ニ μ ヲ選ンデ、スベテノ $\lambda > \mu$ ニ對
シテ

$$(1) \quad p_\lambda \in \mathcal{U}_\alpha(p)$$

ヲラシメ得ルトキ、 p_λ ハ p ニ收斂スルトイヒ、 p ヲ p_λ ノ
極限ト名付ケ、

$$(2) \quad p = \lim_{\lambda} p_\lambda$$

デアラハス。又 α ニ對シテ、 λ ヲ選ンデ、 $\mu, \nu > \lambda$ ノト
キ常ニ

$$(3) \quad p_\mu \in \mathcal{U}_\alpha(p_\nu)$$

ヲラシメ得ルトキ (p_λ)ハ *fundamental* デアルトイ

フ。一気=収斂スル(p_n)ハ明ラカ = fundamental
 デアル。ニツ¹ fundamental + d.s. p. (p_n),
 (g_n) ハ、 $\alpha \sim$ 對シテ μ ヲ定メテ, $\lambda > \mu$ ナルスベテ
 , $\lambda = \psi$ イテ

$$(4) \quad p_n \in \mathcal{U}_n(g_n)$$

ナラシメ得ルトキ, $\alpha \sim$ 同値デアルトイフ。 $p = \lim p_n$ ト
 イフコトハ, (p_n) ト一気 p ノミヨリ成ル d.s. p. が同値ナ
 ルコトト一致スル。コノ同値ナル概念ハ明ラカ = 同値律ヲ満
 足スル。同値ナル d.s. p. ハ同時 = 収斂シ, ψ ノ極限ハ一致
 スル。

スベテ fundamental + d.s. p. が必ず収斂スル
 トキ, $\mathcal{R}$ ハ完全デアルトイフ。コレガ G. Birkhoff =
 ヨル完全性ノ定義デアル。

A. Weil, 完全性ヲコレト平行シテ論ズルタメニ次
 ノヤウナ概念ヲ導入スル: 空間 $\mathcal{R}$ ノ部分集合族 (C_α)
 — α ハ單ナル index —

$$(D) \quad C_\alpha \text{ ノ有限個ノ積ハ } 0 \text{ ナリ: } \prod_{j=1}^l C_{\alpha_j} \neq 0$$

ナル條件ヲ満足スルトキ D-family デアルトイフ。
 D-family (C_α) ハ任意, p ノ近傍 $\mathcal{U}_\alpha(p) =$ 對
 シテ

$$(E) \quad C_\alpha \subset \mathcal{U}_\alpha(p)$$

ナル C_α ヲ含ムトキ, 一気 p = 収斂スルトイヒ, p ヲ C_α ノ極

根ト名付ケ

$$(6) \quad p = \lim C_\alpha$$

トカク。又、任意ノ α = 對シテ

$$(7) \quad p, q \in C_\alpha \quad \text{トラバ} \quad p \in \mathcal{U}_\alpha(q)$$

ナル C_α ラ合ムトキ *fundamental* デアルトイフ。

A. Weil ハ *fundamental* + *D-family* $\Rightarrow$ *Cauchy family* ト名付ケタノデアル。明ラカニ
無 = 收斂スル *D-family* ハ *Cauchy family* デ
アル。コノ逆が成立ツトキ、 $\mathcal{R}$ ハ完全デアルトイフノデア
ル。スナハチ

スベテノ *Cauchy family* (*fundamental*
ナル *D-family*) が收斂スルトキ $\mathcal{R}$ ハ完全デアルトイ
フ。—— A. Weil ノ完全性ノ定義デアル。

(C_α) が *Cauchy family* ナルトキ、 $p = \lim_\alpha C_\alpha$
トイフコトハ、定義 = ヨレバ

$$(8) \quad p \in \prod_\alpha C_\alpha^b$$

ト一致スル。コノ事實ハ後 = 利用スルコトガアル。

更 = A. Weil ハ、ニツノ *Cauchy family*
(C_α), (C'_β) ハ、($C_\alpha + C'_\beta$) が又 *Cauchy family*
ナルトキ、同値デアルト名付ケタ。吾々 = ハ然シコノ同値ナ
ル概念ハ殆ンド必要デナイ。

以上導入シタスベテノ概念ハ、スベテ一様位相的デアル。
コノコトハ証明スルマデモナク明カデアラウ。

任意 $d.s.p. (p_\lambda)$ が與ヘラレタトキ

$$(9) \quad C_\lambda = (p_\mu; \mu > \lambda)$$

トオケバ (C_λ) ハ D -family デアツテ, (p_λ) が
fundamental = 限ツテ (dann wird nur
dann!) fundamental デアリ, (p_λ) が收斂スルト
キ = 限ツテ 收斂シ而モソノトキ

$$(10) \quad \lim_{\lambda} C_\lambda = \lim_{\lambda} p_\lambda$$

トナル。吾々ハ (C_λ) 7 (p_λ) = 属スル D -family ト名
付ケル。

逆 = 任意 D -family (C_α) が與ヘラレタトキ,
(λ) 7 (α) カラ導カレタ $d.s.p.$ トシ, 各 λ = 對シテ

$$(11) \quad p_\lambda \in \prod_{\alpha \in \lambda} C_\alpha$$

ナル点 p_λ フーツツツ對應サセレバ, (p_λ) ハ $d.s.p.$ デ
アル。コレヲ (C_α) カラ導ビカレタ $d.s.p.$ トヨブ。 (C_α)
カ fundamental ナラバ明ラカ = $(p_\lambda) \in$ funda-
mental デアツテ, コノトキ (p_λ) ハ (C_α) が收斂スルト
キ = 限ツテ 收斂シ, 而モ

$$(12) \quad \lim_{\lambda} p_\lambda = \lim_{\alpha} C_\alpha$$

デアイル。²⁾

以上ノ結果ヲマトメテ次ノ様ニ言フコトガ出來ル。

2) (p_λ) が fundamental デアツテモ (C_α) ハ必ずしも
fundamental デハナイ。

定理1. *fundamental d. s. p.* と *Cauchy family* の収斂²⁾ に関シテハ全ク同等デアル。

コノ事カラ直チ = G. Birkhoff の意味ノ完全性ト A. Weil の定義シタ完全性が一致スルコトが分ル。³⁾

任意ノ一様位相空間ハ、スベテノ *fundamental d. s. p.* ノ *limit* を添加シテ完全ナ空間ニ拡張スルコトが出来ル。⁴⁾ コノ操作ヲ完全化トイヒ、又 $\mathcal{R}$ を完全化シテ得ラレタ空間 $\tilde{\mathcal{R}}$ ヲモ亦 $\mathcal{R}$ ノ完全化トヨブ。 $\mathcal{R}$ ハ $\tilde{\mathcal{R}}$ = 於テ *überall dicht* ナ空間ト一様位相ノ意味デ同値デアル。逆ニ $\tilde{\mathcal{R}}$ ハコノ條件ニヨツテ一意的ニ定マル。

定理2₁. $A \subset \mathcal{R}$ トスル。 $p \in A$ ナルタメノ必要且充分ナ條件ハ、

$$\lim_{\alpha} C_{\alpha} = p, \quad C_{\alpha} \subset A$$

ナル *Cauchy family* (C_{α}) が存在スルコトデアル。

証明. 充分ナコトハ明白。必要ナコトハ、 $C_{\alpha} = A \cap \mathcal{U}_{\alpha}(p)$ トオケバ分ル。コレヨリ定理1ニヨツテ

定理2₂⁵⁾. $p \in A$ ナルタメノ必要且ツ充分ナ條件ハ $\lim_{\lambda} p_{\lambda} = p$, $p_{\lambda} \in A$ ナル *d. s. p.* (p_{λ}) が存在スルコトデアル。

3) コレニツイテハ既ニ Graves が注意シテホル; Graves: *On the completing of a Hausdorff space*, *Annals of Math.* Vol. 38. 61-64.

4) A. Weil: *l. c.* Graves: *l. c.*

5) G. Birkhoff: *a. a. O.* Theorem 1.

定理3. 完全 + uniform space $\mathcal{R}$ の部分集合 A が完全 + ルタメノ必要且ッ充分 + 条件ハ A が $\mathcal{R}$ デ開 + テアル事デアル。

証明. 定理2₂ カラ直チ = 分ル。

3. Totale Beschränktheit. 一様位相空間 $\mathcal{R}$ ハ, 各 α = 對シテ 適當 = 有限個ノ点 $p_1, p_2, \dots, p_l$ フトツテ

$$(1) \quad \mathcal{R} = \sum_{j=1}^l \mathcal{U}_\alpha(p_j)$$

ナラシメ得レトキ total beschränkt デアルトイフ。¹⁾

コレモ明カ = 一様位相的 + 概念デアル。

先ヅ total beschränkt ナルタメノ必要且充分 + 条件ヲ述ベル。

定理1. $\mathcal{R}$ が total beschränkt ナルタメノ必要且ッ充分 + 条件ハ, $\mathcal{R}$, 任意, D-family $(C'_\gamma) =$ 對シテ

$$(*) \quad \begin{cases} 1^\circ \text{ 各 } C_\alpha \text{ ハ夫々或 } C'_\alpha = \text{含マレル: } C_\alpha \subset C'_\gamma; \\ 2^\circ \text{ 各 } C'_\alpha \text{ ハ夫々或 } C_\alpha \text{ フ含ム: } C'_\gamma \supset C_\alpha \end{cases}$$

ナル條件ヲ満足スル Cauchy family (C_α) が存在スルコトデアル。

コノ條件ハ又 d. s. p. = ヨツテ現ハサレル, コレヲ示スタメ =

1) A. Weil l.c.

定義 1. d.s.p. (p_λ) / 部分集合 (p_{λ_Λ}) が $\wedge$ γ index トスル d.s.p. + ルトキ, λ_Λ が条件:

(2) 任意 / $M, \mu =$ 對シテ $\lambda > M, \lambda_\Lambda > \mu$ + ル Λ が存在スルヲ満足スルトラバ, $(p_{\lambda_\Lambda}) \wedge (p_\lambda)$ ト cofinal デアルトイフ。²⁾

然ルトキハ

定理 1₂. $\mathcal{R}$ が total beschränkt + ルタメノ必要且ツ充分ノ條件ハ, $\mathcal{R}$ / 任意 / d.s.p. (p_λ) が cofinal + fundamental d.s.p. (p_{λ_Λ}) ヲ含ムコトデアアル。

証明ハ次ノ如クスル: 先ヅ

i) $\mathcal{R}$ が total beschränkt + ラバ 任意 / D-family $(C'_\gamma) =$ 對シテ (*) ヲ満足スル Cauchy family (C_α) が存在スル;

コトヲ示ス。コノタメニ近傍系 $(\mathcal{U}_\alpha(p))$ ヲ整列シテ

$$\mathcal{U}_1(p), \mathcal{U}_2(p) \cdots \mathcal{U}_\omega(p) \cdots \mathcal{U}_\alpha(p) \cdots, \\ \alpha < \aleph_0$$

トシ, index α ヲ超限順序数ト考ヘ, $\alpha =$ ツイテ帰納法ヲ用ヒル。各 $\alpha =$ 對シテ D-family $(C'_\gamma^{(\alpha)})$ ヲ超限帰納法ニヨツテ

$$(a) \quad \tau < \alpha \text{ + ラバ } (C'_\gamma^{(\tau)}) \subset (C'_\gamma^{(\alpha)})$$

+ ル様ニ定義スル。先ヅ

$$(C'_\gamma^{(0)}) = (C'_\gamma)$$

2) G. Birkhoff, cofinal, 定義, 一般化デアアル。

トオク。次 = てく σ + ルスベテノ τ = ツイテ $(C_r^{(\tau)})$ が定義サレタモノト假定スル。

コノトキ

$$(b) \quad (C_\beta^*) = \sum_{\tau \in \sigma} (C_r^{(\tau)})$$

トオケバ, $(\mathcal{A}) =$ ヨツテ明ラカ = (C_β^*) ハ D-familyデアル。 $\mathcal{R}$ が total beschränkt + ルコトカラ, 点 p ヲ適當ニ選ンテ

$$(c) \quad C_\beta^{**} = C_\beta^* \cap \mathcal{U}_\alpha(p)$$

トオイタトキ, (C_β^{**}) が又 D-family + ルヲウ = 出來ルコトガ分ル。何トナレバ, 若シ然ラズトスレバ, 各点 $p =$ 對シテ適當ニ有限個ノ $\beta = \beta_1(p), \beta_2(p), \dots, \beta_l(p)$ ヲ選ンテ

$$\prod_{j=1}^l C_{\beta_j(p)}^* \cap \mathcal{U}_\alpha(p) = 0$$

ナラシメルコトガ出來ル。然ルニ $\mathcal{R}$ ハ

$$\mathcal{R} = \sum_{t=1}^n \mathcal{U}_\alpha(p_t)$$

ト現ハサレル。故ニ

$$\begin{aligned} \prod_{t=1}^n \prod_{j=1}^l C_{\beta_j(p_t)}^* &= \prod_{t=1}^n \prod_{j=1}^l C_{\beta_j(p_t)}^* \cap \sum_{t=1}^n \mathcal{U}_\alpha(p_t) \\ &\subseteq \sum_{t=1}^n \left(\prod_{j=1}^l C_{\beta_j(p_t)}^* \cap \mathcal{U}_\alpha(p_t) \right) = 0 \end{aligned}$$

コレハ (C_β^*) が D-family + ルコトニ反スル。——

カクノ如ク (C_β^{**}) ヲ定メテ

$$(d) \quad (C_r^{(\sigma)}) = (C_\beta^*) \cup (C_\beta^{**})$$

トオケバ, $C_\beta^{**} \subset C_\beta^*$ ナカラ, 明ラカ = $(C_r^{(\sigma)})$ ハ D-family
デ, 又 (2) ヲ満足スル. 又 (C) カラ 分ル如ク $(C_r^{(\sigma)})$ ハ

$$C_\beta^{**} \subset \mathcal{U}_\alpha(p)$$

ナル C_β^{**} ヲ含ム. 以上ノ結果カラ

$$(C_\alpha) = \sum_{\sigma < \delta_\alpha} (C_r^{(\sigma)})$$

トオケバ (C_α) ハ Cauchy family デアル. (C_α) ト (C_β')
ノ間 = (*) ナル関係ガアルコトハ, ソノ構成カラ明ラカデア
ル.

ii) $\mathcal{R}$ ノ任意ノ D-family $(C_r') =$ 對シテ (*) ヲ満
足スル Cauchy family (C_α) ガ存在スルヲラベ, $\mathcal{R}$,
各 d. s. p. (P_λ) ハ cofinal + fundamental d. s.
 $P(P_{\lambda\wedge})$ ヲ含ム.

証明: (P_λ) = 属スル D-family ヲ (C'_λ) トシ,
 (C'_λ) = 對シテ (*) ヲ満足スル Cauchy family ヲ (C_α)
トシ, (C_α) カラ 導ビカレタ d. s. p. ヲ (P_λ) トスル.³⁾ P_λ
ハ明ラカ = (P_λ) = 属スル; $P_\lambda = P_{\lambda\wedge}$. カクノ如ク定義
シタ $(P_{\lambda\wedge})$ ガ fundamental ナコトハ (C_α) ガ
fundamental ナコトカラ分ル. (P_λ) ト cofinal ナ
ルコトハ 次ノ如ク容易ニ分ル: $M = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l)$ トル
ガ 導ヘラレタトスル. (*) = ヨツテ $C'_\mu \supset C_\alpha$ ナル α ガアル.

3) コノ言葉ノ定義ニツイテハ Nr. 2 参照.

故 $\Lambda = (\alpha_1, \dots, \alpha_\ell, \alpha)$ トオケバ

$$p_{\lambda_\Lambda} = p_\Lambda \in \prod_{\beta \in \Lambda} C_\beta \subset C_\alpha \subset C'_\mu$$

故 =

$$\lambda_\Lambda > \mu$$

iii) $\mathcal{R}$ ノ任意ノ d.s.p. (p_λ) ガコレト cofinal + fundamental d.s.p. (p_{λ_Λ}) ヲ含ムトラバ $\mathcal{R}$ $\wedge$ total beschränkt デアル。

何トナレバ, $\mathcal{R}$ ガ total beschränkt デナイト
スレバ, 或ル ω = 對シテハ, $p_1, p_2, p_3, \dots$ ナル無限
個ノ点ヲ

$$j \neq k \text{ ナラバ } p_j \notin \mathcal{U}_\omega(p_k)$$

ナレ様ニ選バコトガ出來ル。⁴⁾ (p_{j_Λ}) ヲ (p_{j_i}) ト cofinal
+ fundamental d.s.p. トスレバ, M ヲ適當ニ定メテ

$$M < \Lambda \text{ ナラバ } p_{j_\Lambda} \in \mathcal{U}_\omega(p_{j_M})$$

ナラシメルコトガ出來, $\wedge$ cofinal 事カラ, Λ ヲ適當ニ
トツテ $j_\Lambda \neq j_M$ ナラシメルコトガ出來ル。コレハ矛盾デア
ル。

—— i) ii) iii) = ヨツテ定理 1, ト 1/2 ガ成立ツコト
ガ分ル。

定理 2. total beschränkt + 空間ノ一樣連続ノ
Bild $\wedge$ total beschränkt デアル。

4) 順次 $= p_{n+1} \notin \sum_{j=1}^n \mathcal{U}_\omega(p_{j_i})$ ナル点 p_{n+1} ヲトツテ行ケバヨイ。

証明. 定義カラ容易ニ分ル. スナハチ: $\mathcal{R}$ *total beschränkt* ナ空間トシ, f ヲ一様連続ナ寫像,
 $\mathcal{R}' = f(\mathcal{R})$ トスル. 假定ニヨツテ $\mathcal{U}'_n$ ガ與ヘラレタトキ,
 $f(\mathcal{U}_n(p)) \subset \mathcal{U}'_n(f(p))$ ナル $\mathcal{U}_n$ ガ定マル. 故ニ

$$\mathcal{R} = \sum_{j=1}^n \mathcal{U}_n(p_j)$$

ナル p_j ($j=1, 2, \dots, n$) 1 存在カラ, $p'_j = f(p_j)$ ト
 オケバ

$$\mathcal{R}' = \sum_{j=1}^n \mathcal{U}'_n(p'_j)$$

ナルコトガ分ル.

上記ノ定理 1, カラ直チニ次ノ重要ナ定理ガ得ラレル:

定理 3^{*)} *uniform space* $\mathcal{R}$ ガ *bicompact* ナ
 ルタメノ必要且ツ充分ナ條件ハ, $\mathcal{R}$ ガ *totally bounded*
 ナ且 *complete* ナル事デアル.

証明. 先ヅ $\mathcal{R}$ ガ *bicompact* デアルトスル. 然ル
 トキハ $\mathcal{R} = \sum_p \mathcal{U}_n(p)$ ヨリ, $\mathcal{R} = \sum_{j=1}^n \mathcal{U}_n(p_j)$ ナル p_1, p_2
 $\dots, p_n$ ガ存在シナケレバナラヌ. スナハチ $\mathcal{R}$ ハ *totally*
bounded デアル. ヌ (C_α) ヲ *Cauchy family* トス
 レバ, C_α^b 1 有限個ノ積ハ 0 デナイカラ, $\prod_\alpha C_\alpha^b \neq 0$ デナケ
 レバナラナイ. $p \in \prod_\alpha C_\alpha^b$ トスレバ, $p = \lim_\alpha C_\alpha$; 故ニ

*) A. Weil l.c.

$\mathcal{R}$ は complete デアル。

逆 = $\mathcal{R}$ が totally bounded 且つ complete トスル。然ルトキハ, (C'_γ) ア任意ノ D -family トスレバコレニ對シテ (*) ア満足スル fundamental + D -family (C_α) ガアル。從ツテ, complete デアルカラ $p = \lim_{\alpha} C_\alpha$ が存在スル。故ニ, $p \in \prod_{\alpha} C_\alpha^b \subset \prod_{\gamma} C_\gamma^b$ デアルカラ, $\prod_{\gamma} C_\gamma^b \neq \emptyset$ 。故ニ $\mathcal{R}$ は bicompact デアル。

J. von Neumann = 從ツテ ⁵⁾

定義 2. uniform space $\mathcal{R}$ ハ, ヲノスベテノ totally bounded + 閉部分集合が bicompact + ルトキ, topologically complete デアルトイフ。

上記ノ定理 3 ニヨレバ, コノ定義ハ又次ノヤウニ言フコトガ出來ル。

定義 2'. uniform space $\mathcal{R}$ ハ, ヲノスベテノ totally bounded + 閉部分集合が complete + ルトキ, topologically complete デアルトイフ。

明ラカニ complete + uniform space ハ topologically complete デアルガ, 逆ハ成立シナイ。コノ事ニツイテハ又後ニ述ベル。

5) Topological linear space. Trans. 39. 1935

定理4. 一様位相空間 $\mathcal{R}$ の部分集合 A が *totally bounded* ならば $A^b \in \text{totally bounded}$ である。

証明. 與へられた $\mathcal{U}_\alpha =$ 對して $\mathcal{U}_\varepsilon^2(p) \subset \mathcal{U}_\alpha(p)$ となる $\mathcal{U}_\varepsilon$ をとって, $A \subset \sum_{j=1}^n \mathcal{U}_\varepsilon(p_j) +$ なる $p_j (j=1, 2, \dots, n)$ を定む。然るに明らかならう。

$$A^b \subset \sum_{j=1}^n \mathcal{U}_\varepsilon^2(p_j) \subset \sum_{j=1}^n \mathcal{U}_\alpha(p_j).$$

故に A^b は *totally bounded* である。

定理5. *uniform space* $\mathcal{R}$ が *topologically complete* となるための必要且つ充分な条件は, $\mathcal{R}$ 1 スベテ *totally bounded* + *fundamental d.s.p.* が收斂スルコトである。

証明. 定理4 から 明白である。

uniform space $\mathcal{R}$ が與へられたとき, コレ = スベテ *totally bounded* + *fundamental d.s.p.* の, „limit“ を添加して, *topologically complete space* $\tilde{\mathcal{R}}$ = 拡張スルコトが出来ル。

一般に, *uniform space* $\mathcal{R}$ の部分集合 A は, 任意に $p \in \mathcal{R} =$ 對して, $\lim_{\lambda} p_\lambda = p, p_\lambda \in A$ となる *totally bounded* + *d.s.p.* (p_λ) を選べ得るとき, A は $\mathcal{R}$ 中で *regularly dense* であるといふことは, 明らかならう。定理が成立つ:

定理6. *uniform space* $\mathcal{R}$ は $\mathcal{R}$ 中で *regularly*

dense + 部分空間トシテ含ム *topologically complete + space* $\tilde{\mathcal{R}}$ = 拡張セラレル。 $\tilde{\mathcal{R}}$, $\mathcal{R}$ = ヨツ
テ一意的 = 定マレ。

4. 直積. $\mathcal{R}^\nu$ ヲ夫々 ($\mathcal{U}_{\sigma}^\nu(p)$) ヲ近傍系トスル一
様位相空間トスル。コノトキ, $\mathcal{R}^\nu$ カラ 夫々任意ニ一ツツツ
トツタ点 p^ν ノ組 (p^ν) ヲ一ツノ点ト考ヘ, コノマウノ点
 $p = (p^\nu)$ 全体ヨリ成ル空間ヲ $\mathcal{R}$ トシ, $\mathcal{R} =$ 於テ, 近
傍系ヲ

$$(1) \quad \mathcal{U}_{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_l}^{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l}(p) = (q; q^{\nu_j} \in \mathcal{U}_{\sigma_j}^{\nu_j}(p^{\nu_j}), \\ 1 \leq j \leq l)$$

= ヨツテ定義サレタ ($\mathcal{U}_{\sigma_1 \dots \sigma_l}^{\nu_1 \dots \nu_l}(p)$) ト定義スレバ, $\mathcal{R} \in$

亦一様位相空間トナル。コレヲ $\mathcal{R}^\nu$, 直積ト名付ケ

$$(2) \quad \mathcal{R} = \prod_{\nu} \mathcal{R}^\nu$$

デアラハス。 $p = (p^\nu)$ ナル $\mathcal{R}$ ノ点 $p =$ 對シテ, p^ν ヲ
 p ノ ν -座標トヨブ。明ラカニ各 $\mathcal{R}^\nu$ カスベテ *uniform space* ナラバ $\mathcal{R} \in$ *uniform space* デアル。

定理 I. $\mathcal{R}^\nu$ カスベテ *totally bounded* ナラ
バ $\prod_{\nu} \mathcal{R}^\nu \in$ *totally bounded* デアル。

証明. $\mathcal{U}_{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_l}^{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l}$ が與ヘラレタトキ,

$$\mathcal{R}^{\nu_j} = \sum_{k=1}^{n_j} \mathcal{U}_{\sigma_j}^{\nu_j}(p_k^{\nu_j}) \text{ ナル有限個ノ点 } (p_1^{\nu_j}, p_2^{\nu_j}, \dots, p_{n_j}^{\nu_j})$$

である。 $p_{k_1, k_2, \dots, k_l}$ が v_j 座標が $p_{k_j}^{v_j}$ となる点とする。
 この様な点の明らかな存在する。容易に分る如く

$$\mathcal{R} = \sum_{k_1=1}^{n_1} \sum_{k_2=1}^{n_2} \dots \sum_{k_l=1}^{n_l} v_{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_l}^{v_1 v_2 \dots v_l} (p_{k_1, k_2, \dots, k_l})$$

故に $\mathcal{R}$ は totally bounded である。

定理2. complete + uniform space $\mathcal{R}^v$,
 直積 $\prod \otimes \mathcal{R}^v$ は complete である。

証明. $p_\lambda = (p_\lambda^v) \in \prod \otimes \mathcal{R}^v$ が fundamental
 + d.s. p. ならば, 各 p_λ^v は $\mathcal{R}^v =$ 於て fundamental
 である。故に $p^v = \lim_{\lambda} p_\lambda^v$ が存在する。 $p = (p^v)$ とス
 レバ, 明らかに $\lim_{\lambda} p_\lambda = p$. 故に $\prod \otimes \mathcal{R}^v$ は complete.

この証明 = 於て totally bounded + d.s. p. / を
 考へるならば, 直ちに次の定理が得られる。

定理3 topologically complete + uniform
 space / 直積は又 topologically complete であ
 る。

上の定理1, 2 と Nr 3, 定理3 から直ちに次の定理が
 得られる:

定理4. bicompact + uniform space / 直積
 は bicompact である。⁴⁾

$\mathcal{R}^v$ が夫々 (p_n^v) が距離函数系とする空間となる。
 $p, q \in \prod \otimes \mathcal{R}^v =$ 對して

4) Tychonoff: Ann. 102

$$(3) \quad \rho_{\nu, \kappa}(\rho, q) = \rho_{\kappa}^{\nu}(\rho^{\nu}, q^{\nu})$$

トオケバ, $\rho_{\nu, \kappa} \wedge \prod_{\nu} \otimes \mathcal{R}^{\nu} =$ 於ケル距離函数デアツテ $\prod_{\nu} \otimes \mathcal{R}^{\nu}$ 一様位相ハ $\rho_{\nu, \kappa}$ 全体カラ成ル距離函数系 $(\rho_{\nu, \kappa})$ デ與ヘラレル. 吾々ハ $(\rho_{\nu, \kappa})$ ヲ以テ $\prod_{\nu} \otimes \mathcal{R}^{\nu}$ 距離函数系ト定義スル.

$\mathcal{R}$ ガ (ρ_{κ}) ヲ距離函数系トスル一般距離空間ナルトキ, $\mathcal{R}$ / $\rho_{\kappa}(\rho, q) = 0$ ナルニ点 ρ, q ヲ *identifizieren* シテ得ラレル距離空間ヲ $\mathcal{R}^{\kappa}$ トシ, $\rho \in \mathcal{R} =$ 對應スル $\mathcal{R}^{\kappa}$ 点ヲ ρ^{κ} トスル. 勿論 $\mathcal{R}^{\kappa}$ 距離函数 ρ^{κ} ハ

$$(4) \quad \rho^{\kappa}(\rho^{\kappa}, q^{\kappa}) = \rho_{\kappa}(\rho, q)$$

デ與ヘラレテキルト考ヘテキル. 然ルトキハ $\rho \rightarrow (\rho^{\kappa})$ ナル對應ニヨツテ $\mathcal{R}$ ハ $\prod_{\kappa} \otimes \mathcal{R}^{\kappa}$ 中ニ *isometrisch* = *einbetten* サレル. スナハチ

定理5. 一般距離空間ハ距離空間ノ直積ノ部分空間ト考ヘラレル.

従ツテ, $\mathcal{R}^{\kappa}$ ガスベテ *totally bounded* ナラバ $\mathcal{R}$ モ亦 *totally bounded* デアル. 逆ニ, $\rho \rightarrow \rho^{\kappa}$ ハ一様連続デアアルカラ, $\mathcal{R}$ ガ *totally bounded* ナラバ, $\mathcal{R}^{\kappa}$ モ *totally bounded* デナケレバナラナイ. $\mathcal{R}^{\kappa}$ ガ *totally bounded* トイフコトハ, (4) カラ分ル如ク, ρ_{κ} ヲ距離函数トスル空間ト考ヘタトキ, $\mathcal{R}$ ガ *totally bounded* ナルコト, スナハチ ρ_{κ} = 関シテ $\mathcal{R}$ ガ有限ノ ε -*netz* ヲ有スルコトニ一致スル. コノ事ハ (ρ_{κ}) ヲ距離函数系トスル一様位相空間ニツイテモ成立

定理 6. (ρ_n) が距離函数系トスルー様位相空間 X が
totally bounded ナルタメノ必要且ツ充分ナ條件ハ,
 各 ρ_n = 関シテ X が有限ノ ε -*net* ヲ有スルコトデアアル。