



Title	Compact ナ空間に於ケル transition process I
Author(s)	吉田, 耕作; 角谷, 静夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1940, 196, p. 139-147
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74782
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

852. Compact + 空間 = 於ケル transition process, I

吉田耕作, 角谷静夫(訳)

§1 定常 + 流れ / 分析 $\rightarrow$ ergodic theory / 見地
カラ取扱ツタモノ / 中デ現在モットモ進ンダ研究ハ N. Kryloff
ト N. Bogoliouboff - ヨレソレデアラハ。¹⁾ 彼等ハ
compactum (compact + 距離空間) $\mathcal{R}$ / $\mathcal{R}$ 自身へ
ノ位相學的変換 / one-parameter group
 P_t ($-\infty < t < +\infty$):

$$(1) P_t P_\Delta = P_{t+\Delta} \quad (P_0 = \text{恒等変数})$$

$\rightarrow$ ergodic theory = ヨツテ 精細 = analyse ンテ

-
- (1) N. Kryloff et N. Bogoliouboff: La théorie
générale de la mesure dans son application à
l'étude des systèmes dynamiques de la
mécanique non linéaires. Ann. of Math.
38(1937), 65-113

アルノデアル。 $measure =$ 関スル何等ノ制限 (例ヘバ $invariant - measure$ ノ存在ノ如キ)ヲモ置カズニ,
 R ト $P_t =$ 関スル位相學的ナ假定ノミカラ出ルシテアル
 ト云フ意ニ於テ非常ニ一般ナ研究アル。

所デ上ノ P_t ヲ "phase space" R , transition process

$$x \rightarrow x' = P_t \cdot x$$

ヲ表ハスモノト考ヘルナラバ, P_t ハ reversible ナ transition processヲ定義シテアル訳アル:

$$P_{-t} P_t = P_t P_{-t} = \text{恒等変換} \quad (1) = \text{ヨル}.$$

確率論ノ問題ト考ヘルナラバ, transition ノ reversibilityヲ假定シタイヲ議論シタイ。

ソコデ次ノヤウニ考ヘテミル。 R ノ上デ連続ナ函数 $f(x)$ ノ全体ハ $norm \|f\| = \sup_{x \in R} |f(x)|$ ノ意味デ

Banach 空間ヲ作ル。之レヲ (C) ト書ク。各 P_t ハ (C) ノ (C) 内ヘノ線型寫像

$$T_t \cdot f = f^{(t)}, \quad f^{(t)}(x) = f(P_t \cdot x)$$

ヲ定義スル。 T_t ハ i) $T_t T_s = T_{t+s},$

$$ii) \quad \|T_t\| = \sup_{\|f\|=1} \|T_t \cdot f\| = 1,$$

$$iii) \quad \text{positive} \quad (f(x) \geq 0 \text{ for } x \in R \rightarrow f^{(t)}(x) \geq 0 \text{ for } x \in R)$$

iv) $f(x) \equiv 1$ ナラバ $f^{(t)}(x) \equiv 1$, 等ノ條件ヲ満足スル。 P_t ヲ調ベル代リニ T_t ヲ調べ, 其ノ際 reversible

1 假定即チ T_n ($n > 0$) 存在、假定ヲトリ 去ツタ モノヲ取扱フコト=スレバヨイ訣デアル。之レハ "stable + distribution" フモツ Markoff chain" 1 議論⁽¹⁾ フ用フレバ或程度マデ Kryloff-Bogoliouboff ト parallel = ヤレル様=思ハレルノデ以下ニ述ベテ見タイ。但シ"差當リ" discrete + 取扱ヒヲスルコト=スル。

問題ヲ discrete = formulate スルト

問題 R ヲ compactum, (C) ヲ R デノ連続函数ノ作ル Banach 空間, T ヲ (C) ノ (C) 内ヘノ線型寫像デ次ノ條件ヲ満足スルモノトスル。

(2) $\left\{ \begin{array}{l} T \text{ハ positive operation (即チ non-negative + 函数 } \in (C) \text{ ヲ同ジク non-negative + 函数 } \in (C) = \text{寫ス}) = \text{シテ, 且ツ恒等的} = 1 \text{ ナル函数ヲ不変} = \text{スル。} \end{array} \right.$

斯カル T ノ iteration T^n ($n = 1, 2, \dots$) ヲ analyse スルコト。

§ 2 問題は取扱フタメノ道具トシテ stable distribution フモツ Markoff chain 1 議論ノ他ニ以下ニ述ベル定理3ガ必要デアル。談話ヲ讀ミ易クスルタメニ先ヅ定理1, 2トシテ談話830, 831, 845ノ結果ガケヲ述ベテオキマス。

topology ヲ假定シテ空間 R ト R ノ部分集合ノ作ル complete additive + family $B(R)$ ヲ考

(1) 談話 830, 831, 845

へ, ($\mathcal{R} \in \mathcal{B}(\mathcal{R})$ と假定スル) $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ の要素ニナルヲ
 ウチ $\mathcal{R}$ の部分集合ヲ $\mathcal{R}$ の可測集合ト呼ブ。 $P(x, E)$ ヲ
 $\mathcal{R}$ の点 x カ, 単位時間, 核 = simple markoff
 chain = ヲツテ, $E \in \mathcal{B}(\mathcal{R})$ = 移ル遷移確率トス
 ル。 $P(x, E)$ ハ E ヲ fix シタトキ x の函数トシテ
 measurable, 且ツ x ヲ fix シタトキ E = 関シテ
 complete additive, ト假定スル。 今 non negative 且 $E \in \mathcal{B}$
 $(\mathcal{R})$ = 関シテ complete additive, $\mathcal{G}(\mathcal{R})$ = 1ナル如キ $\mathcal{G}(E)$ = 對シ

$$(3) \int_{\mathcal{R}} \mathcal{G}(dx) P(x, E) = \mathcal{G}(E) \quad \text{for all } E \in \mathcal{B}(\mathcal{R})$$

ナルトキ $\mathcal{G}$ ハ markoff chain $P(x, E)$, stable
 distribution テアラルト云フノデアアル。 $\mathcal{R}$ デ可測 且ツ

$$\int_{\mathcal{R}} |f(x)| \mathcal{G}(dx) = \|f\|_{\mathcal{G}} \quad \text{ナル如キ函数 } f(x), \text{ 全体ハ}$$

norm $\|f\|_{\mathcal{G}}$ の意味デ Banach 空間 $(L_{\mathcal{G}})$ ヲ作
 ル。 コノトキ。

定理 1 $f \in (L_{\mathcal{G}})$ = 對シ

$$f^{(1)}(x) = \int_{\mathcal{R}} P(x, dy) f(y),$$

$$\int_{\mathcal{R}} f(x) \mathcal{G}(dx) P(x, E) = \int_E f^{(1)}(x) \mathcal{G}(dx)$$

ナル如キ $f^{(1)}, f^{(1')} \in (L_{\mathcal{G}})$ カ定リ 且 $\|f^{(1)}\|_{\mathcal{G}}, \|f^{(1')}\|_{\mathcal{G}} \leq \|f\|_{\mathcal{G}}$

定理 2 $f^{(2)}(x) = \int_{\mathcal{R}} P(x, dy) f^{(1)}(y), \dots, f^{(n)}(x) = \int_{\mathcal{R}} P(x, dy) f^{(n-1)}(y),$

$$\int_{\mathcal{R}} f^{(-1)}(x) g(dx) P(x, E) = \int_E f^{(-2)}(x) g(dx), \dots,$$

$$\int_{\mathcal{R}} f^{(-n+1)}(x) g(dx) P(x, d\mathcal{Y}) = \int_E f^{(-n)}(x) g(dx), \dots$$

ヲ定義スルヲバ $\frac{1}{n} \sum_{m=1}^n f^{(m)}, \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n f^{(-m)}$ ハ夫々“平均收斂”スル。即チ $f^{(*)}, f^{(-*)} \in (L_g) =$ 對シ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n f^{(m)} - f^{(*)} \right\|_g = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n f^{(-m)} - f^{(-*)} \right\|_g = 0,$$

$$\text{且、} f^{(*)}(x) = \int_{\mathcal{R}} P(x, d\mathcal{Y}) f^{(*)}(\mathcal{Y}) \text{ (almost everywhere),}$$

$$\int_{\mathcal{R}} f^{(-*)}(x) g(dx) P(x, d\mathcal{Y}) = \int_E f^{(-*)}(x) g(dx). \text{ 然モ}$$

$f \in (L_g)$ が 有界可測函數 ノ場合ニハ上ノ“平均收斂”ハ“almost everywhere convergence”ニ置キ換ヘラレル。(1)

定理3 $\mathcal{R}$ 7 compactum, (C) 7 $\mathcal{R}$ デノ連続ノ函數 $f(x)$ 7 $\text{norm } \|f\| = \sup_x |f(x)|$ 7 作ル Banach 空間トスルトキ, (C) ノ上ノ positive⁽²⁾ 7 線型汎函數 $F(f)$ ハ

(1) 但シ $f^{(-m)}, f^{(*)}$ 7 ツイテ a. e. C. 7 云フキメニハ, 距離 $d(E_1, E_2)$

$$= g(E_1 + E_2 - E_1 \cdot E_2) \text{ ノ意味デ } B(\mathcal{R}) \text{ 7 可分距離空間} =$$

ルコトヲ假定セタケレバナラナイ。

(2) $f(x) \in (C)$ 7 non-negative 7 $F(f) \geq 0$ 7 ルコト。

$$F(f) = \int_{\mathcal{R}} f(x) \mathcal{Q}(dx)$$

ノ形デアル。コノ $\mathcal{Q}$ ハ $\mathcal{R}$ ノ Borel 集合ニ對シテ complete additive 且ツ non-negative ナ集合函数デ $\|F\| = \mathcal{Q}(\mathcal{R})$ 。

証明 $\mathcal{R}$ デ Borel-measurable 且ツ 有界ナ函数 $f(x)$ ノ全体ハ norm $\|f\| = \sup_x |f(x)|$ デ Banach 空間 (M) ノ作ル。 $F(f)$ ハ, Banach, extension theorem = コリ, norm $\|F\|$ ノ上ゲナイデ (M) デノ 線型汎函数 = 拡張デキル, 然モコノトキ (M) デ positive = ナルヌウ = extend デキル。

以下其ノ証明。 $f(x) \in (M) =$ 對シ $\frac{|f(x)| + f(x)}{2} = f_+(x)$ ノ以テ f ノ positive part ノ定義スル。ソコデ $p(f) = \|f_+\| \cdot \|F\|$ ト置クト p ハ明カ =

$$\begin{cases} p(f+g) \leq p(f) + p(g), \quad t p(f) = p(tf) \\ \hspace{15em} (t \text{ ハ正数又ハ } 0) \\ p(f) \leq \|F(f)\| \quad \text{for } f \in (C) \end{cases}$$

ヲ満足スル。コノ最後ノ不等式ハ $F(f)$ ノ (C) = 於ケル positiveness カラワカル。故ニ Banach, extension theorem = 於ケル p トシテ上ノ p ノトレバ求ムル結果ヲ得ル。

斯ル (M) デノ positive ナ線型汎函数 $F(f)$ ハ容易ニワカル如ク, $\mathcal{R}$ ノ Borel 集合ニ對シ finite additive 且ツ non-negative, $\mathcal{Q}(\mathcal{R}) = \|F\|$,

トル如キ集合函数 $\Theta(E) = \exists$ 1

$$F(f) = \int_{\mathcal{R}} f(x) \Theta(dx)$$

ト書ケル。ソコデ $\mathcal{R}$ ノ開集合 $O =$ 對シ $\Phi(O) = \sup_F \Theta(F)$,
($F \cap O =$ 含まレル開集合) トレ

$$\varphi(A) = \inf_{A \subset O} \Phi(O) \quad (O \text{ 開集合})$$

ト置ケバ, 良ク知ラレタマウ⁽¹⁾ $\varphi(A)$ ハ $\mathcal{R}$ ノ Borel 集合
= 對シテ complete-additive = ナル。然シテ
 $f \in (C)$ ナラバ

$$\int f(x) \Theta(dx) = \int f(x) \varphi(dx)$$

ナルコトガワカル。ソレニハ $\int f(x) \varphi(dx)$ ノ定義ニ於テ
 $m = \min_x f(x)$, $M = \max_x f(x)$ ノ間ヲ $a_0 = m < a_1$
 $< a_2 < \dots < a_{n-1} < M = a_n$ ト分割シテ“近似和”

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \varphi(E_i), \quad a_i < x_i < a_{i+1},$$

$$E_i = E_{\mathcal{R}} \{a_i \leq f(x) < a_{i+1}\}$$

ヲ作ル時 = $\varphi(\bar{a}_i) = 0$ ($i = 0, 1, \dots, n$), $\bar{a}_i = E_{\mathcal{R}} \{f(x) = a_i\}$

ナル如ク分割スルコト = スレバヨイ⁽²⁾ 之デ証明ヲ終ル。

(1) Hahn - Caratheodory.

(2) $\varphi(\bar{a}) > 0$ ナル如キ a ハ高々可附番個ナコトハ $\varphi(\mathcal{R}) = 1$
カラ明ラカ。

系 (C), conjugate space ι (linear functionals on $(C) \vdash \tau$) locally weakly compact $\tau_{\tau \vee \iota}^{(1)}$

注意 コノ系ハ *essential* = ハ *Kryloff-Bogoljuboff* ノ論文 *loc. cit.* = 於ケル 基本的 + 定理 1 ト 同等デアール。併シ定理 3 ノ如ク *Banach* 空間ノ定理トシテ述ベテ上ノ様ニ系 3 ヲ導イタ方が意味がワカリ易イ。

例ヲ定理3ヲ使ヘバ **問題** $\rightarrow$ Markoff chain,
 問題=焼キナホスコトハ誤ハナイ。即チ $f^{(1)} = T \cdot f$, $f \in (C)$
 トシ, x ヲ fix スレバ $f^{(1)}(x)$ ハ (C) ノ上ノ positive
 + linear functional ナカテ $P(x, E) + \nu$
 non-negative 且ツ Borel 集合ニ對シ complete
 - additive + measure ナ

$$(3) \quad f^{(1)}(x) = \int_{\mathcal{R}} P(x, dy) f(y)$$

ト表ハサレル。 $T \cdot 1 = 1$ (假定(2)) カラ $P(x, R) \equiv 1$. 又 $f^{(1)}(x) \in (C)$ カラ $P(x, E)$ が E ヲ fix シタトキ x , $Borel-measurable$ ナ函数ニナルコトモ明カ。故ニ

問題八

(3)が(C)ノ(C)内へノ線型寫像ヲ定義シテル様ナ Markoff chain ノ問題ト同等デアルコトガ分ツタ。

(1) (C) / separability $\Rightarrow$ IV.

以上デ問題は / *formulation* ト道具トが出来タカラ
次カラ本論=入リタイ。