



Title	一樣位相空間二就テ
Author(s)	小平, 邦彦
Citation	全国紙上数学談話会. 1940, 197, p. 150-175
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74784
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

854. 一様位相空間 = 就テ

小平 邦彦 (東大)

5. 函数空間. X ヲ任意ノ空間, $\mathcal{R}$ ヲ $\{\mathcal{U}_\alpha(p)\}$ ヲ
近傍系トスル uniform spaceトスル. X ヲ domain
トシ $\mathcal{R}$ ヲ rangeトスルスベテノ函数ノ作ル空間ヲ $\mathcal{R}^*$ デ
現ハス. $\mathcal{R}^*$ 及ビソノ部分空間ヲ函数空間トヨビ, τ ヲ現
ハス.

τ ニ於テハ 通常ニ種ノ一様位相ガ定義サレル。スナハ
チ

(1) $\mathcal{U}_\alpha(f_0) = \{f; f(x) \in \mathcal{U}_\alpha(f_0(x)) \text{ for all } x \in X\}$
ガ定義サレタ $\mathcal{U}_\alpha(f_0)$ ヲ f_0 ノ 強イ近傍トイヒ, コノ近傍系
ニヨッテ 定メラレル $\mathcal{R}^*$ ノ一様位相ヲ 強イ一様位相, 或ハ
略シテ strong topology トイフ. コレニ對シテ

$$(2) \mathcal{U}_{x_1, x_2, \dots, x_l}(f_0) = \{f; f(x_j) \in \mathcal{U}_\alpha(f_0(x_j)), \\ 1 \leq j \leq l\}$$

ガ定義サレタ $\mathcal{U}_{x_1, x_2, \dots, x_l}(f_0)$ ヲ f_0 ノ 弱イ近傍トイヒ,
コノ近傍系ヲ定メラレル一様位相ヲ 弱イ一様位相, 或ハ weak
topology トイフ。

$f \in \mathcal{R}^*$ ニ對シテ, $p^x = f(x)$ トオケバ, f ハ $p = (p^x)$
ナル直積空間:

$$(3) \prod_{x \in X} \mathcal{R}^x, \quad \mathcal{R}^x = \mathcal{R}$$

ノ点ヲ現ハサレル. コノ様ナ意味ヲ $\mathcal{R}^*$ ハイクツカノ $\mathcal{R}$ ノ

直積ト考ヘラレル。 $\mathcal{R}^*$ 、弱イ一様位相ハ、 $\mathcal{R}^*$ ヲ $\mathcal{R}$ ノ直積ト考ヘタトキノ一様位相ニ他ナラナイ。

従ツテ直積ニ関スル定理カラ、例ヘバ次ノ定理ガ得ラレル。

定理1. $\mathcal{R}$ ガ *totally bounded* ナラバ $\mathcal{R}^*$ ハ *weakly totally bounded* デアル。

上記ノ如キ種々ノ一様位相ヲ統一的一論ズルタメニハ、次ノ様ナ概念ヲ導入スルノガ有效デアル: (X) ヲ $\mathcal{R}$ ノ *additive*¹⁾ト部分集合属トシ

$$(4) \quad \sum_{X \in (X)} X = \mathcal{R}$$

ナルモノトスル。コノ様ナ (X) ガ與ヘラレタトキ、

$$(5) \quad \mathcal{U}_{X \in (X)}(f_0) = (f; f(x) \in \mathcal{U}_x(f_0(x)), x \in X)$$

ニヨツテ定義サレタ $\mathcal{U}_{X \in (X)}(f_0)$ ヲ f_0 ノ (X) -近傍ト名付ケ、
 $\{\mathcal{U}_{X \in (X)}(f)\}$ ナル近傍系ニヨツテ定メラレル $\mathcal{R}^*$ ノ一様位相ヲ (X) -一様位相トヨブコトニスル。 $\mathcal{R}^*$ ガ $\{\mathcal{U}_{X \in (X)}(f)\}$ ナル近傍系ニヨツテ *uniform space*トナルコトハ容易ニ確メラレル。 (X) トシテ $\mathcal{R}$ ノミヨリ成ル集合属ヲトレバ、
 (X) -一様位相ハ強イ一様位相ト一致シ、 (X) ヲ $\mathcal{R}$ ノ有限部分集合ノ全体トスレバ、 (X) -一様位相ハ弱イ一様位相トナル。

(X) ト (X') ガ與ヘラレタトキ、如何ナル $X \in$ 或ル $X' =$ 含マレルナラバ、 $(X) \cap (X') =$ 含マレルトイヒ

1) 有限加法的トスル、

$$(6) \quad (X) \subset (X')$$

トカクコト = スル。明カ = $(X) \subset (X')$ ナラバ, (X) -一様位相ハ (X') -一様位相ヨリ弱イ。弱イ一様位相ハスベテノ (X) -一様位相ヨリモ弱ク, 強イ一様位相ハスベテノ (X) -一様位相ヨリモ強イ。

定理2. (X) -fundamental + d.s.p. (f_λ) が各 $x =$ 於テ $\lim_{\lambda} f_\lambda(x) = f(x)$ ナラバ, (X) -一様位相ノ意味デモ $\lim_{\lambda} f_\lambda = f$ デアル。

証明. 任意ニ與ヘラレタ $\mathcal{U}_{x_0} =$ 對シテ, $\mathcal{U}_c^2 \subset \mathcal{U}_\infty$ ナル $\mathcal{U}_c$ ヲトル。

λ_0 ヲ, $\lambda, \mu > \lambda_0$ ニツイテハ $f_\lambda \in \mathcal{U}_{x_0}(f_\mu)$ ナル如ク定メル。

$\lambda > \lambda_0$ ヲ任意ニ定メ, μ ヲ各 $x \in X$ ニ對シテ $f_\mu(x) \in \mathcal{U}_c(f(x))$ ナルヤウニ定メレバ, $x \in X$ ニ對シテ

$$f_\lambda(x) \in \mathcal{U}_c(f_\mu(x)) \subset \mathcal{U}_c^2(f(x)) \subset \mathcal{U}_\infty(f(x))$$

トナル。即チ $f_\lambda \in \mathcal{U}_{x_0}(f)$ 。故ニ (X) -一様位相ノ意味デ $\lim_{\lambda} f_\lambda$ デアル。

明ラカニ (X) -一様位相ノ意味デ $\lim_{\lambda} f_\lambda = f$ ナラバ各 $x =$ 於テ $\lim_{\lambda} f_\lambda(x) = f(x)$ デアレカラ

定理2'. f_λ が $f = (X')$ -収斂スルトキ, (f_λ) が (X) -fundamental ナラバ, ソレハ $f = (X)$ -収斂スル。

定理3₁. $\mathcal{R}$ が complete ナラバ, $\mathcal{R}^\infty$ ハ, 任意ノ

$(X) = \Psi$ イテ, (X) -complete デアル。

証明: (f_λ) ヲ (X) -fundamental + d.s. p ト
スレバ, 各 $x = \Psi$ イテ $(f_\lambda(x))$ ハ fundamental デアル。
故 $= \lim_{\lambda} f_\lambda(x) = f(x)$ が存在スル。 $f = f(x)$ ヲ
カクノ如ク定ムレバ, 定理1 = ヨツテ $\lim_{\lambda} f_\lambda = f$ 。 故 $=$
 $\mathcal{R}^\infty$ ハ (X) -complete デアル。

全ク同様ニシテ

定理3₂. $\mathcal{R}$ が topologically complete +
ラバ, $\mathcal{R}^\infty$ ハ (X) -topologically complete デ
アル。

定理4. 函数空間 $\mathcal{C}$ が (Y) -totally bounded +
ラバ, $\mathcal{C} = \mathcal{C}$ テハ, 任意ノ (X) -一様位相ハ (Y) -一
様位相ト一致スルカ, 然ラザレバ (Y) -一様位相ヨリ強い。

証明.²⁾ 任意ノ $\mathcal{U}_{Y\alpha} =$ 對シテ $\mathcal{U}_{X\tau} \subset \mathcal{U}_{Y\alpha} + \mathcal{V}_{X\tau}$
が存在スルコトヲ示セバヨイ。コノタメニ或ル $\mathcal{U}_{Y\alpha}$ ガアツ
テ, $\mathcal{U}_{X\tau} \subset \mathcal{U}_{Y\alpha} + \mathcal{V}_{X\tau}$ が存在シナカッタト假定シテ
矛盾ニ至ルコトヲ示ス。先ヅテ

$$\mathcal{U}_\tau^3 \subset \mathcal{U}_\alpha$$

2) $\mathcal{C}$ が (Y) -complete + ルトキハ, $\mathcal{C}$ ハ bicompact ト + ル
カラ, (Y) -位相, 従ツテ (Y) -一様位相ガ他ノ一様位相
ヨリ弱いコトガ直チニ分ル。一般ノ場合ニハ $\mathcal{C}$ ノ代リニ
 $\mathcal{C}$ ノ (Y) -完全化 $\widetilde{\mathcal{C}}$ ヲ考ヘレバ, (Y) -complete + 場
合ニ帰省セシメラレル。コノデハコノ方法ニヨラズニ直
接証明シタノデアル。

ナル様 = 定メル, 然ルトキハ各 $X = \mathbb{N}$ イテ

$$f_X \in \mathcal{U}_{X \subset Y}(g_X), \quad f_X \notin \mathcal{U}_{Y \subset X}(g_X)$$

ナル f_X, g_X が存在スル. $(X) \subset (Y)$ ナル関係ヲ <ト定メ
レバ, (X) ハ directed set トナツテキル. 故ニ $\mathcal{F}$ が
(Y)-totally bounded ガカラ, (X) ト cofinal +
d. s. (X_Λ) ヲ選ンデ $(f_{X_\Lambda}), (g_{X_\Lambda})$ が (Y)-funda-
mental ナル様 = 出来ル. (Nr. 3, 定理 12). 従ッテ
M ヲ適當 = トレバ,

$\Lambda > M$ ナラバ, $f_{X_\Lambda} \in \mathcal{U}_{Y \subset X}(f_{X_M}), g_{X_\Lambda} \in \mathcal{U}_{Y \subset X}(g_{X_M})$
トナル. $f_{X_M} \notin \mathcal{U}_{Y \subset X}(g_{X_M})$ コリ

$$f_{X_M}(y) \notin \mathcal{U}_\alpha(g_{X_M}(y)), \quad y \in Y$$

ナル y がアル. 然ルニ Λ ヲ適當 = トレバ, $y \in X_\Lambda$ ナラシメ
ルコトが出来ル.

$$\text{従ッテ } f_{X_\Lambda} \in \mathcal{U}_{X_\Lambda \subset Y}(g_{X_\Lambda}) = \text{ヨツテ}$$

$$f_{X_\Lambda}(y) \in \mathcal{U}_\tau(g_{X_\Lambda}(y))$$

トナルカラ

$$\begin{aligned} f_{X_M}(y) &\in \mathcal{U}_\tau(f_{X_\Lambda}(y)) \subset \mathcal{U}_\tau^2(g_{X_\Lambda}(y)) \\ &\subset \mathcal{U}_\tau^3(g_{X_M}(y)), \end{aligned}$$

故ニ

$$f_{X_M}(y) \in \mathcal{U}_\alpha(g_{X_M}(y))$$

トナル. コレハ矛盾デアアル. ——— 証明終 ———

コノ定理カラ例ヘバ次ノ定理が得ラレル.

定理 4'. $(X) \subset (Y)$ ナルトキ, $\mathcal{F}$ が (Y)-totally
bounded ナラバ, $\mathcal{F}$ = 於テ (Y) - 様位相ト (X) - 様位

相ハ一致スル。³⁾

$\mathcal{K}$ が $\{\mathcal{U}_\alpha(x)\}$ ヲ近傍系トスル一様位相空間ナル場合ヲ考ヘル。コノトキ、一様連続ナ函数カラ或ル函数族 $\mathcal{F} \subset \mathcal{R}^*$ ハ、與ヘラレタ $\mathcal{U}_\tau =$ 對シテ、 $\mathcal{U}_\alpha$ ヲ適當ニ選ンデ、 $x, y \in X$ 及ビ $f \in \mathcal{F}$ ノ如何ニ關セズ、常ニ

$$(7) \quad x \in \mathcal{U}_\alpha(y) \text{ ナラバ } f(x) \in \mathcal{U}_\tau(f(y))$$

ナラシメ得ルトキ、同程度ニ一様連続デアルトイフ。

定理5. $\mathcal{R}$ 及ビ $\mathcal{K}$ が共ニ *totally bounded* ナルトキ、 $\mathcal{F} \subset \mathcal{R}^*$ が同程度ニ一様連続ナラバ、 $\mathcal{F}$ ハ *strongly totally bounded* デアル。

証明. 任意ニ $\mathcal{U}_\alpha$ ヲ與ヘテ、 $\mathcal{U}_\tau$ ヲ

$$\mathcal{U}_\tau^3 \subset \mathcal{U}_\alpha$$

ナル様ニ定メル。 $\mathcal{U}_\tau =$ 對シテ (7) ヲ満足スル $\mathcal{U}_\alpha$ ヲトル。

假定ニヨッテ

$$\mathcal{K} = \sum_{j=1}^l \mathcal{U}_\alpha(x_j)$$

ナル x_j ($j=1, 2, \dots, l$) が存在スル。 $\mathcal{F}$ ハ *weakly totally bounded* デアル。(定理1)。故ニ

$$\mathcal{F} = \sum_{k=1}^n \mathcal{U}_{x_1, x_2, \dots, x_l, \tau}(f_k)$$

ナル f_k が存在スル。スナハチ、任意ノ $f \in \mathcal{F} =$ 對シテ

$$f(x_j) \in \mathcal{U}_\tau(f_k(x_j)), \quad 1 \leq j \leq l$$

3) 従ッテ、 $\mathcal{F}$ が (Y) -*totally bounded* ナラバ、 (Y) -一様位相ハ弱イ一様位相ト一致スル。

ナル f_k がアル。任意ノ x ハ或ル $\mathcal{U}_\alpha(x_j) = \text{含マレル}$ 。
コノトキ。

$$f(x) \in \mathcal{U}_\tau(f(x_j))$$

トナルカラ

$$\begin{aligned} f(x) \in \mathcal{U}_\tau(f(x_j)) &\in \mathcal{U}_\tau^2(f_k(x_j)) \\ &\in \mathcal{U}_\tau^3(f_k(x)) \subset \mathcal{U}_\sigma(f_k(x)), \end{aligned}$$

スナハチ, $f \in \mathcal{U}_\sigma(f_k)$ デアル。故 =

$$\mathcal{F} = \sum_{k=1}^n \mathcal{U}_\sigma(f_k)$$

故 = $\mathcal{F}$ ハ totally bounded デアル。

6. 線形空間。吾々ハ

$$1^\circ \quad |u|_K \geq 0, \text{ スベテノ } K = \text{ツイテ } |u|_K = 0 \text{ ナラ}$$

$$\Rightarrow u = 0,$$

$$2^\circ \quad |u+v|_K \leq |u|_K + |v|_K,$$

$$3^\circ \quad |\alpha u|_K = |\alpha| |u|_K, \quad \alpha \text{ ハ複素数。}$$

ナル條件ヲ満足スル。函数系 $(|u|_K)$, $u \in \mathcal{L}$, ノ定義サレ
タ線形空間 $\mathcal{L}$ ヲ一般 Banach 空間ト名付ケ, $(|u|_K)$
ヲ $\mathcal{L}$ ノ norm 系トヨブ。') $\mathcal{L}$ = 於テ距離函数系 (p_K)
ヲ

$$(2) \quad p_K(u, v) = |u - v|_K$$

= ヨツテ定義スル。 $\mathcal{L}$ ハコノ距離函数系 = ヨツテ一般距離空

1) convex + topological linear space ハスベテ一
般 Banach 空間ト考ヘラレル。

Neumann: Topological linear space. l.c.

関トナリ, Nr. 1 — Nr. 5 / 理論が適用サレル.

例トレテ Banach 空間 B / *bounded linear functional* / *space* を考ヘル事トシ, コレヲ $\bar{B}$ トスル. $f \in \bar{B}$ ハ, $\forall$ / *linearity* = ヨツテ,

$$(3) \quad \mathcal{X} = (X; |x| \leq 1)$$

ナル B / *unit sphere* = 於ケル様子 = ヨツテ一意的 = 定マル. $\forall$ コヲ吾々ハ $\bar{B}$ を $\mathcal{X}$ を *domain* トスル函数空間ト考ヘテ $(\mathcal{X})$ -一様位相ヲ導入シ, コレヲ $\bar{B}$ / $(\mathcal{X})$ -一様位相ト名付ケル.

$$(4) \quad |f|_X = \overline{\lim_{x \in X} |f(x)|}$$

= ヨツテ *norm* 系 $(|f|_X)$ を定義スルベ, $\bar{B}$ / $(\mathcal{X})$ -一様位相ハ, コノ *norm* 系 = ヨツテ與ヘラレル. $\bar{B}$ ハスナハチ $(|f|_X)$ を *norm* 系トスル一般 Banach 空間デアアル. コノ意味 / *strong uniform topology* ハ

$$(5) \quad |f| = \overline{\lim_{|x| \leq 1} |f(x)|} = \overline{\lim_{x \in B} |f(x)| / |x|}$$

ナル *norm* を與ヘラレ, 通常 / *strong topology* / 定義ト一致スル. *weak uniform topology* = 通常 / *weak topology* ト一致スル.

定理 1. $\mathcal{F} \subset \bar{B}$ が *weakly totally bounded* ナルタメノ必要且ツ充分ノ条件ハ, $\mathcal{F}$ が *strongly bounded* ナルコト, スナハチ $f \in \mathcal{F}$ = ツイテ $|f| \leq C < +\infty$ ナル常数 C が存在スル事デアアル.

証明.²⁾ 先づ $\mathcal{F}$ が weakly totally bounded
トスル。然ルトキハ x_0 ラーツ定メレバ $|f(x_0)|$ ハ f が $\mathcal{F}$
ヲ動クトキ有界デアアル。従ッテ

$$|f| = \frac{1}{C} \overline{\lim_{|x| \leq C}} |f(x)|;$$

$$|f(x)| \leq |f(x+x_0)| + |f(x_0)|$$

デアアルカラ, $|f|$ が有界ナコトヲ言フ = ハ, 或球: $\mathcal{K} = (x + x_0; |x| < C) =$ 於テ $|f(x)|$ が一様 = 有界ナコトヲ示セ
バヨイ。コノタメ = $|f(x)|$ が假 = 如何ナル $\mathcal{K} =$ 於テモ一
様 = 有界デアイトシテ見ル。然ルトキハ $f_n, (n=1, 2, \dots)$
及ビ, $\mathcal{K}_n, (n=1, 2, \dots)$ ヲ

$$\mathcal{K}_n^b \subset \mathcal{K}_{n-1}; \quad \lim_n (\mathcal{K}_n, \text{直径}) = 0$$

且ツ

$$|f_n(x)| \geq n, \quad x \in \mathcal{K}_n$$

ナル様 = 定メル事が出来ル。B ハ完全デアアルカラ, $x_0 = \lim_n \mathcal{K}_n$
が存在スル。 x_0 ハスベテ $\mathcal{K}_n =$ 含マレル。故 =

$\lim_n |f_n(x_0)| = +\infty$. コレハ矛盾デアアル。—— 故 =
 $|f|$ ハ有界デアアル。

逆 = $\mathcal{F}$ が strongly bounded デアルトスレバ,
 $x \in \mathcal{X}$ ノトキ, $f(x)$ ノ range ハ一様 = 有界デアアル。故
= Nr. 5 定理 1 = ヨッテ, $\mathcal{F}$ ハ weakly totally bound-
ed デアル。

$\mathcal{F} \subset \overline{B}$ が (X) -totally bounded ナラバ, $\mathcal{F} =$
於テ (X) -一様位相ハ弱イ一様位相ト一致シ, 従ッテ $\mathcal{F}$ ハ

weakly totally bounded となる。故 =

定理2. $\mathcal{H}$ が (X) -totally bounded ならば,
 $\mathcal{H}$ は strongly bounded である。

定理3. $\overline{B}$ は (X) -topologically complete
である。

証明: (f_λ) が (X) -totally bounded かつ
fundamental d.s.p. となるべ, $|f_\lambda| \leq C < +\infty$
であって, $x \in B$ となるべ $(f_\lambda(x))$ は fundamental
である。

故 = $\lim_{\lambda} f_\lambda(x) = f(x)$ が存在する。 $\lim_{\lambda} f_\lambda = f$ は
 (X) - , 従って weakly convergent である。故 =
 $f(x)$ は linear であって, $|f_\lambda(x)| \leq C$ ($x \in X$) より
 $|f(x)| \leq C$ ($x \in X$); 又 $f \in \overline{B}$ 。故 = $\overline{B}$ は (X) -
topologically complete である。

ヨク知られておる如く, $\overline{B}$ の conjugate space を
 $\overline{\overline{B}}$ とするべ, $\overline{\overline{B}} \supset B$ であって, $\overline{\overline{B}}$ = 於ける weak topology
は, B の weak topology と一致する。 B が regular
ならば, 従って weakly topologically complete
である。

Goldstein は B が regular となるため, 必要且つ
充分な条件は, B が δ -weakly complete となること
を示した。³⁾ 定理1と3 = ヲって strongly bounded-

3) Goldstein: Weakly complete Banach spaces,
duke Math. J. 4. (1938)

ness $\wedge$ weakly totally boundedness ト一致スル。
 従ッテ δ -weakly completeness $\wedge$ topologically completeness ト一致スル。故=

Goldstein / 定理: B が regular $\wedge$ ルタメノ必要且充分ナ
 条件ハ, B が weakly topologically complete ナルコトデアアル。

Goldstein / 証明 / 方法ハ B が $\overline{B} =$ 於テ weakly regularly dense ナル
 コトヲ 示スデアアル。

$\overline{B}$ / 任意 / linear functional $\forall F$ (bounded
 ナクテモヨイ) トスレバ, 容易ニ分ル如ク, 任意 / $f_i \in \overline{B}$
 ($i = 1, 2, \dots, n$) = 對シテ, $\varepsilon > 0$ ナ如何ニ小サク トッテ
 ε , $|F(f_i) - f_i(x)| < \varepsilon$ ($i = 1, 2, \dots, n$) ナル $x \in B$
 ガアル。スナハチ $\overline{B}$ / linear functional 全体 /
 space ナ $L(\supset \overline{B})$ トスレバ, $B \wedge L =$ 於テ weakly
 dense ナデアアル。故= B が weakly complete ナラバ
 $B = L$ ナケレバナラナイ。 $\overline{B}$ / „hammel, base“
 ナ考ヘ, コレヲ (f_c ; $c = 1, 2, \dots, \omega, \dots$) トスル。

然ルトキハ $\sum_c$ ナ任意ニ與ヘタトキ, $F(f_c) = \sum_c$
 ナル $F \in L$ ガ定マル。 $|f_c| = 1$ ナルヌウニ定メテオケバ,
 $F(f_c) = f_c(x)$ ナル $x \in B$ ガ存在スルカラ,
 $|\sum_c| = |F(f_c)| = |f_c(x)| \leq |x|$. 故= $|\sum_c|$ ハ有界ナ
 ナケレバナラナイ。故= f_c / 個數ハ有限個デアッテ, $\overline{B}$.
 従ッテ B ハ有限階ナケレバナラナイ。スナハチ weakly
 complete ナ Banach 空間ハ有限階 / 空間ニ限ルデアアル。⁴⁾

4) G. Birkhoff: Moore-Smith convergence in
 general topology.

コレ = 反シテ regular + Banach 空間ハ weakly topologically complete デアル. topologically complete + 概念ノ重要ナコトガコレニヨッテ分ル.

7. 群ノ上ノ概週期函数. I. 平均値

群 G = 於テ

$$1^\circ \quad \mathcal{U}_\alpha^{-1} = \mathcal{U}_\alpha, \quad \mathcal{U}_\alpha \supset 1.$$

$$2^\circ \quad \alpha, \beta = \text{對シテ } \mathcal{U}_\gamma \subset \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \text{ + ル } \gamma \text{ が存在スル.}$$

$$3^\circ \quad \alpha = \text{對シテ } \mathcal{U}_\gamma^2 \subset \mathcal{U}_\alpha \text{ + ル } \gamma \text{ が存在スル.}$$

+ ル 三-條件ヲ満足スル,, 單位元ノ近傍系 $\mathcal{U}$ が與ヘラレタトキ

$$\mathcal{U}_\alpha(x) = \mathcal{U}_\alpha \cdot x$$

ヲ以テ x ノ近傍系ヲ定義スレバ, $G =$, コノ近傍系ニヨッテ uniform topology が導入セラレル. コレハ right invariant デアル:

$$\mathcal{U}_\alpha(x) \cdot a = \mathcal{U}_\alpha(xa)$$

ソコデコレヲ right invariant + uniform topology ト名付ケル。¹⁾

$\mathcal{U}_\alpha$ が更ニ

$$4^\circ. \quad x \mathcal{U}_\alpha x^{-1} = \mathcal{U}_\alpha$$

ヲ満足スルトキハ, $\mathcal{U}_\alpha \cdot x = x \mathcal{U}_\alpha$ ガカラ, uniform

1) 詳シクハ A. Weil: Sur les espaces à structure uniforme 参照.

topology は更 $\leftarrow$ left invariant トナル。4° 満足
スル uniform topology 7 invariant uniform
topology トヨブコト = スル。

right invariant 7 topology = 関シテハ $\mathcal{O}_f$ ハ
必ズシモ topological group トナラナイガ, invari-
ant 7 uniform topology = 関シテハ group /
演算

$$x^{-1}y$$

が一様連続 = ナル。 $\mathcal{O}_f$ ハ言ハバ uniform topological
group トナルノデアル。

right invariant uniform topology が
($\mathcal{U}_\alpha$) = ヨツテ 與ヘラレタキ, コレカラ invariant
uniform topology ヲ導ク 一ツノ方法ハ

$$\mathcal{U}_\alpha^* = \prod_{x \in \mathcal{O}_f} x \mathcal{U}_\alpha x^{-1}$$

= ヨツテ 4° 7 満足スル $\mathcal{U}_\alpha^*$ 7 作ルノデアル。 $\mathcal{U}_\alpha^*$ ノ意味ハ
次ノ様ニ解釈サレル: $a \in \mathcal{O}_f$ 7, $\mathcal{O}_f$ 7 $\mathcal{O}_f$ = 寫ス Abbil-
dung:

$$x \rightarrow x \cdot a$$

ヲ現ハスモノト考ヘル。カリ考ヘタトキノ, $a \in \mathcal{O}_f^q$ = 於ケ
ル strong topology トシテノ $\mathcal{U}_\alpha$ = 對應スル近傍ガ
 $\mathcal{U}_\alpha^*$ トナルノデアル。²⁾ 實際 =

2) Nr. 5 参照

$$\mathcal{U}_\alpha^* \cdot a = (b; x b \in \mathcal{U}_\alpha x a, x \in \mathcal{O}_f)$$

デアル。

$x \rightarrow x \cdot a$ + ν Abbildung $\wedge$, 明ラカ = 同程度 = 一樣連続デアルカラ, Nr. 5 定理 5 より直チ = 次ノ定理ヲ得ル:

定理 1. $\mathcal{O}_f$ が $(\mathcal{U}_\alpha)$ = ヨツテ定メラレタ right invariant uniform topology = 関シテ totally bounded トラバ, $(\mathcal{U}_\alpha)$ カラ導カレタ $(\mathcal{U}_\alpha^*)$ = ヨツテ定メラレル invariant uniform topology = ヲイテ totally bounded デアル。

$\mathcal{O}_f$ = right invariant + 距離函数系:

$$\rho_\kappa^r(x y), \quad \rho_\kappa^r(xa ya) = \rho_\kappa^r(x y)$$

(上ノ inden γ $\wedge$ right invariant + 事ヲ示ス) が與ヘラレタトキ

$$\rho_\kappa^r(x) = \rho_\kappa^r(x 1)$$

トオケバ, (ρ_κ^r) デ定メラレル uniform topology $\wedge$

$$\mathcal{U}_{\kappa_1, \dots, \kappa_l}^r \varepsilon = (x; \rho_{\kappa_j}^r(x) < \varepsilon, j=1, 2, \dots, l)$$

ナル近傍系ヲ與ヘラレル。コノトキ

$$\rho_\kappa(x y) = \overline{\lim_{a \in \mathcal{O}_f}} \rho_\kappa^r(ax ay)$$

トオイテ, (ρ_κ) γ (ρ_κ^r) カラ導ビカレタ invariant + 距離函数系トヨナコト = スレバ, 容易 = 分ル如ク, (ρ_κ)

= 對應スル近傍系ハ丁度 $(\mathcal{U}_{k_1}^r, \dots, \mathcal{U}_{k_l}^r)$ カラ導ビカレタ近傍系 $(\mathcal{U}_{k_1}^*, \dots, \mathcal{U}_{k_l}^*)$ トナル。故ニ定理1ノ特別ノ場合トシテ

定理1'. $\mathcal{O}_f$ ガ *right invariant* ナ距離函数系 (ρ_k^r) ニ関シテ *totally bounded* ナラバ (ρ_k^r) カラ導ビカレタ *invariant* ナ (ρ_k) ニ関シテモ *totally bounded* デアル。

$\mathcal{L}$ ノ $(|u|_k)$ ノ *norm* 系トスル *topologically complete* ナ一般 *Banach* 空間トシ。 $\mathcal{O}_f$ デ定義サレタ $\mathcal{L}$ ノ値ヲトル有界ナ函数 $f(x)$ ノ考ヘル。但シコノ有界トイフノハ、各 k ニツイテ $|f(x)|_k$ ガ有界トイフ意味デアイル。

$$\rho_{fk}^r(x, y) = \overline{\lim_{a \in \mathcal{O}_f}} |f(xa) - f(ya)|_k$$

及ビ

$$\begin{aligned} \rho_{fk}(x, y) &= \overline{\lim_{a \in \mathcal{O}_f}} \rho_{fk}^r(ax, ay) \\ &= \overline{\lim_{a, b \in \mathcal{O}_f}} |f(axb) - f(ayb)|_k \end{aligned}$$

トオク。

コノ ρ_{fk}^r ノ用ヒテ $f(x)$ ガ *a. p. (almost periodic)* デアルトイフコトヲ次ノ様ニ定義スル:

定義1'. 距離函数系 (ρ_{fk}^r) ニ関シテ $\mathcal{O}_f$ ガ *totally bounded* ナルトキ、 $f(x)$ ハ $\mathcal{O}_f$ デ *a. p.* デアルトイフ。

定理1' = コレバコノ定義ハ次ノ定義ト同値デアイル:

定義 I. 距離函数系 (ρ_{fk}) = 関シテ O_f が *totally bounded* ナルトキ, $f(x)$ ハ O_f デ $a.p.$ デアルトイフ。

明ラカニ, コノトキ $f(x)$ ハ (ρ_{fk}^r) 乃至 (ρ_{fk}) デ定メラレル O_f ノ *uniform topology* = 関シテ一様連続デアル。逆ニ O_f = 於テ *right invariant* 或ハ *invariant* + *uniform topology* が定義サレテキテ, コレニ関シテ O_f が *totally bounded* ナルトキ, $f(x)$ がコノ *topology* = ツイテ一様連続ナラバ ρ_{fk}^r 乃至 ρ_{fk} ニ亦一様連続トナリ, 従ツテ O_f ハ ρ_{fk}^r 乃至 ρ_{fk} = 関シテ *totally bounded* トナルカラ, $f(x)$ ハ $a.p.$ デナケレバナラナイ。故ニ定義 I 或ハ I^r ハ次ノ様ニ言フ事が出来ル:

定義 I^r . $f(x)$ が O_f = 於ケル *right invariant* 且ツ *totally bounded* + *uniform topology* = 関シテ一様連続ナルトキ $f(x)$ ハ $a.p.$ デアルトイフ。

定義 II. $f(x)$ が O_f ノ *invariant* 且ツ *totally bounded* + *uniform topology* = 関シテ一様連続ナルトキ $f(x)$ ハ $a.p.$ デアルトイフ。

Nr. 4. 定理 6 = ヨレバ O_f が (ρ_k) = 関シテ *totally bounded* トナルタメニハ, O_f が各 ρ_k = 関シテ *totally bounded* ナルコトが必要且ツ充分デアル。従ツテ O_f = 於テ幾ツカノ $a.p.$ function $f_n(x)$ が與ヘラレタトキ, スベテノ ρ_{f_n} ニテ合併シテ得ラレル距離函数

数系 $(\rho_{f_{\lambda k}})$ を考へれば、 O_f は $(\rho_{f_{\lambda k}})$ = 関レテ
totally bounded デアツテ、又明ラカ $f_{\lambda}(x)$ は
 $(\rho_{f_{\lambda k}})$ = ツイテ一様連続デアル。コノ事カラ容易ニ次ノ
 ニ定理が得ラレル:

定理2. $f_{\lambda}(x)$ ($\lambda=1, 2, \dots, \infty$) が夫々 $\mathcal{L}_{\lambda}$ / 値
 フトル O_f / 上ノ $a.p.$ + 函数, $u = u(u_1, \dots, u_{\infty})$ が
 $u_{\lambda} \in \mathcal{L}_{\lambda}$ = ツイテ一様連続 + 函数 + ルトキ, $u(x) =$
 $u(f_1(x), \dots, f_{\infty}(x))$ は $a.p.$ デアル. 特ニ $f(x), g(x)$
 が $a.p.$ + ルトキ $f \pm g \in a.p.$, 又 $f(x)$ 及び numerical
 function $\phi(x)$ が $a.p.$ + ルトキ $\phi(x) f(x)$
 は $a.p.$ デアル。

証明ハ 定義 II カラ明ラカデアル。

定理3 directed set of function $f_{\lambda}(x) (\in \mathcal{L}^{\alpha})$
 が $f(x)$ = 一様ニ収斂スルトキ, 各 $f_{\lambda}(x)$ が $a.p.$ + ラバ
 $f(x) \in a.p.$ デアル。

又 $(\rho_{f_{\lambda k}})$ = 関レテハ O_f / 演算ハ 一様連続デアルカ
 ラ

定理4. $f(x)$ が $a.p.$ + ラバ $f(ax), f(x^T), \text{etc.}$ ハ
 $a.p.$ デアル, 又 $f(x^T y)$ etc. ハ $O_f \otimes O_f$ / 上ノ 函数トレ
 テ $a.p.$ デアル。

証明: $f(x^T), f(x^T y), \text{etc.}$ ハスベテ $(\rho_{f_{\lambda k}})$ =
 ツイテ一様連続デアルカラ, 定義 II = ヨツテ $a.p.$ デアル。

次 = 平均値, 存在ヲ証明スル。³⁾ $\mathcal{L}$ の部分集合 $A = \mathcal{C}_v A$ 7

$$\mathcal{C}_v A = \left(\sum \alpha_j u_j; \alpha_j \geq 0, \sum \alpha_j = 1, u_j \in A \right)$$

ト定義スル。然ルトキハ

定理5. A が *totally bounded* 7ラバ $\mathcal{C}_v A \in \text{total-ly bounded}$ デアル。

証明ハ殆ンド明白デアル。

$f(x)$ が a. p. 7ルトキ

$$W_f = f(\mathcal{O}_f)$$

トオケバ, W_f は *totally bounded* 7 $\mathcal{O}_f$ の一様連続ト像デアルカラ *totally bounded* デアリ, 従ツテ

$$\mathcal{C}_v W_f$$

$\in \text{totally bounded}$ デアル。

a. p. function $f(x)$ ヲーツ定メテ考ヘル。有限個ノ元 $x_1, \dots, x_m \in \mathcal{O}_f$ 7 任意ニトツテ

$$g_x(a, b) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m f(ax_j \cdot b)$$

ナル函数 g_x 7 作り, コノ様ナ函数ノ全体ヲ重トスル, 然ルトキハ

3) S. Bochner, and J. von Neumann: Almost periodic functions in groups, II. Trans. of Am. Math. Soc. Vol. 37, 1935 参照。以下ノ証明ハコノ Bochner ト Neumann ノ証明ヲ吾々ノ言葉ヲ使ツテ言ヒ換ヘタモノデアル。

補助定理: 任意ノ $k_1, k_2, \dots, k_n$, $\varepsilon > 0$ = 對シテ

$$O_{\Delta C_{k_2}} \mathcal{G}_x = \overline{\lim_{a, b}} \overline{\lim_{a', b'}} |\mathcal{G}_x(a, b) - \mathcal{G}_x(a', b')|_{k_2} < \varepsilon$$

ナル $\mathcal{G}_x \in \mathfrak{A}$ が存在スル。

証明: 簡単ノタメ

$$|u|_K = |u|_{k_1} + |u|_{k_2} + \dots + |u|_{k_n}$$

トオク. *uniform topology* = 關シテハ $|u|_{k_1}, \dots, |u|_{k_n}$

ヲ $|u|_K$ デ置換ヘテヨイ. $\mathcal{G}_x(a, b)$ が $\mathfrak{A}$ ノ函数ナルトキ,

$\mathcal{G}_x(a y_j, y_n b) \in \mathfrak{A} =$ 屬シ,

$$\mathcal{G}_{y_n y}(a, b) = \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \mathcal{G}_x(a y_j, y_n b)$$

$\in$ 亦 $\mathfrak{A} =$ 屬スル. 然ルニ

$$|\mathcal{G}_x(a, b) - \mathcal{G}_x(a', b')|_K$$

$$\leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (|f(ax_j, b) - f(ax_j, b')|_K + |f(ax_j, b') - f(a'x_j, b')|_K)$$

ヨリ明ラカナル如ク

$$\rho_{fK}(a, a') < \frac{\varepsilon}{2}, \rho_{fK}(b, b') < \frac{\varepsilon}{2} \text{ ナラバ}$$

$$|\mathcal{G}_x(a, b) - \mathcal{G}_x(a', b')| < \varepsilon$$

デアル. スナハチ $\mathfrak{A}$ 同程度 = 一樣連続ノ函数屬デアル。

即ハ $\rho_{fK} =$ ヲイテ *totally bounded* ナカラ $\rho_{fK} =$ 關スル $\frac{\varepsilon}{2}$ -*Net* ガアル. コレヲ

$$y_1, y_2, \dots, y_n$$

トスル. 然ルトキハ, ρ_{fK} が *invariant* ナ事カラ, $a, b,$
 a', b' ヲ任意ニ與ヘタトキ

$$\rho_{f_k}(ay, a'y_s) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \rho_{f_k}(y, b, y_t, b') < \frac{\varepsilon}{2}$$

とする。\$s, t\$ が存在する。故 =

$$\begin{aligned} & |\mathcal{P}_{yxy}(a, b) - \mathcal{P}_{yxy}(a', b')| \\ &= \frac{1}{n^2} \left| \sum \sum \mathcal{P}_x(a y_j, y_k b) - \sum \sum \mathcal{P}_x(a' y_j, y_k b') \right| \\ &\leq \frac{1}{n^2} |\mathcal{P}_x(a y, y, b) - \mathcal{P}_x(a' y_s, y_t, b')| + \frac{n^2-1}{n^2} O_{\Delta c_k} \mathcal{P}_x \end{aligned}$$

= 於いて

$$|\mathcal{P}_x(a y, y, b) - \mathcal{P}_x(a' y_s, y_t, b')| < \varepsilon$$

と出来る

$$O_{\Delta c_k} \mathcal{P}_{yxy} \leq O_{\Delta c_k} \mathcal{P}_x - \frac{1}{n^2} (O_{\Delta c_k} \mathcal{P}_x - \varepsilon).$$

\$n \wedge \varepsilon / \varepsilon\$ = 関係して定まる。故 =

$$B = \frac{\sup}{\mathcal{P}_x \in \mathfrak{P}} O_{\Delta c_k} \mathcal{P}_x$$

とすれば

$$B \leq \varepsilon$$

故 = \$B = 0\$ だと出来るようにする。

コ、補助定理 = 有り

$$W_{k_1, k_2, \dots, k_h} \varepsilon$$

$$= (\mathcal{P}_x(a, b); a \in \mathcal{O}, b \in \mathcal{O}, O_{\Delta c_{k_l}} \mathcal{P}_x < \varepsilon, 1 \leq l \leq h)$$

とすれば、\$W_{k_1, \dots, k_h} \varepsilon\$ の空集合ではない。又明らか =

$$\varepsilon' \leq \varepsilon \text{ ならば } W_{k_1, \dots, k_h, \dots, k_{h+l}} \varepsilon' \subset W_{k_1, \dots, k_h} \varepsilon$$

であるから、\$\Pi'\$ が有限積で現れる事 = すれば

$$1^\circ \quad \Pi' W_{k_1, \dots, k_h} \varepsilon \neq 0$$

次、 $O_{\mathcal{C}_{K_L}} \varphi_x < \varepsilon$, $O_{\mathcal{C}_{K_L}} \varphi_y < \varepsilon$ トスレバ

$$\left| \varphi_x(a, b) - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m f(c x_j, d) \right|_{K_L} < \varepsilon$$

$$\left| \varphi_y(a', b') - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(c y_k, d) \right|_{K_L} < \varepsilon$$

ヨリ

$$\left| \varphi_x(a, b) - \frac{1}{nm} \sum_j \sum_k f(x_j, y_k) \right|_{K_L} < \varepsilon$$

$$\left| \varphi_y(a', b') - \frac{1}{nm} \sum_j \sum_k f(x_j, y_k) \right|_{K_L} < \varepsilon$$

ヲ得ルカラ

$$\left| \varphi_x(a, b) - \varphi_y(a', b') \right|_{K_L} < 2\varepsilon$$

故、 $\mathcal{C}_{K_L}$ ヲ以テ直径ヲ現ハスコトスレバ

$$2^\circ \quad \mathcal{C}_{K_L}(W_{K_1}, \dots, K_{K_L} \varepsilon) \leq 2\varepsilon$$

1° ト 2° ハ $(W_{K_1}, \dots, K_{K_L} \varepsilon)$ が Cauchy family ナルコト

ヲ示ス。明カラ

$$W_{K_1}, \dots, K_{K_L} \varepsilon \subset C_v W_f \subset (C_v W_f)^b$$

デアツテ, $C_v W_f$ ハ totally bounded, 従ツテ $(C_v W_f)^b$

ハ complete ナルカラ $(W_{K_1}, K_2, \dots, K_{K_L} \varepsilon)$ ハ一列ニ収斂

スル。コノ極限ヲ $f(x)$ ノ平均値ト呼ビ Mf ナルヲ現ハス:

$$Mf = M f(x) = \lim_{x} W_{K_1}, \dots, K_{K_L} \varepsilon$$

Mf ハ $(W_{K_1}, \dots, K_{K_L} \varepsilon)^b$ ニ含マレルカラ, φ_x ヲ適當ニ

トツテ

$$\left| Mf - \varphi_x(a, b) \right|_{K_L} \leq 2\varepsilon$$

ナラ シメルコトが出来ル. 逆 = 任意ノ $k_1, \dots, k_n, \varepsilon =$ 對シ
テ

$$|M - \varphi_x(a, b)|_{k_\ell} < \varepsilon$$

ナル φ_x が存在スルナラバ, $0 \leq k_\ell \varphi_x \leq 2\varepsilon$ ナルカラ,
 $M = Mf$ デナケレバナラナイ. 故 =

定理 6. $f(x)$ ノ 平均値ヲ Mf トスレバ, 任意ノ $k_1, \dots$
 $\dots, k_n, \varepsilon > 0 =$ 對シテ, $x_1, x_2, \dots, x_m$ ヲ適當ニ選ンデ,
 a, b ノ 如何ニ關セズ

$$\left| Mf - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m f(ax_j, b) \right|_{k_\ell} < \varepsilon$$

ナラシメルコトが出来ル. 逆 =, コノ様ナ constant Mf
ハ 平均値ノ 他ニ ハナイ.

コノ 定理 6 カラ 容易ニ 次ノ 定理 が 得ラレル:

定理 7.

- i) $f(x) = u$ ナラバ $M_x f(x) = u$
- ii) $M(\alpha f + \beta g) = \alpha Mf + \beta Mg$
- iii) $M_x f(ax, b) = M_x f(x)$
- iv) $M_x f(x^{-1}) = M_x f(x)$
- v) $M_x |f(x)|_k \geq \left| M_x f(x) \right|_k$

$\phi(x)$ が numerical a. p. function ナルトキ

$$\left| M_y \phi(y) f(y^{-1}x) - M_y \phi(y) f(y^{-1}z) \right|_k$$

$$\leq M \int_Y |\phi(y)| \|f(y^{-1}x) - f(y^{-1}z)\|_K \leq \rho_{f,K}(x, z) M \int_Y |\phi(y)|$$

故 $= \int_Y |\phi(y)| f(y^{-1}x) \, dx$, a. p. function である.

コレヲ

$$\phi \times f(x)$$

ヲ現ハス. 明ラカニ

$$\phi \times f(x) = \int_Y |\phi(y)| f(y^{-1}x) = \int_Y |\phi(xy^{-1})| f(y)$$

8. 若干 = 於ケル概週期函數 II. 近似ノ理論

一般 $= \rho(x, y) = \rho(xy^{-1})$ が ϕ , totally bounded 且ツ invariant + metric + ルトキ, $\rho(x)$ は $\rho = 1$ 一様連続, 従ツテ a. p. であるカラ

$$\omega_\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t \geq \delta \\ 1 - \frac{2t}{\delta} & 0 \leq t < \delta \end{cases}$$

トスレバ, $\omega_\delta(\rho(x)) \in \text{a. p.}$ である

$$\Delta_\delta(\rho; x) = \frac{\omega_\delta(\rho) \times \omega_\delta(\rho(x))}{\left[\int_X \omega_\delta(\rho(x)) \right]^2}$$

トオケバ, $\Delta_\delta(\rho; x)$ の性質ヲ有スル.

$$1) \Delta_\delta(\rho; x) \geq 0$$

$$2) \int_X \Delta_\delta(\rho; x) = 1$$

$$3) \rho(x) \geq \delta \text{ ならば } \Delta_\delta(x) = 0$$

$$4) \Delta_\delta(\rho; x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{\delta\nu} \ell_\nu(x)$$

但シ $\Rightarrow$ $e_n(x)$ は, O_f の既約 unitary 表現

$$D^{(n)}(x) = (d_{ik}(x)) \text{ カラ}$$

$$e_n(x) = n^{(n)} \sum_i d_{ii}(x), \quad n^{(n)} \in D^{(n)}, \text{ Grad}$$

= ヨ ッ テ 作 ラ レ タ 函 数 ト ス ル, $\alpha \delta_n$ は

$$0 \leq \alpha \delta_n \leq 1$$

ナ ル constant ナ

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \alpha \delta_n = 1$$

デア ル. 又 4) ナ ル 級 数 ハ 絶 對 且 ツ 一 様 = 収 斂 ス ル.

簡 單 ナ タ ヌ, $k_1, k_2, \dots, k_n$ 及 ビ 正 数 δ ノ 組 ヲ σ ナ 現
ハ ス コ ト = ス ル.

$$\sigma = (k_1, k_2, \dots, k_n, \delta)$$

(σ) ナ ル index ノ 集 合 ハ, $\sigma = (k_1, \dots, k_n, \delta)$ 及 ビ
 $\sigma' = (k'_1, \dots, k'_m, \delta')$ = ツ イ テ, 各 k_j カ 或 k'_j ト 一 致
シ, 且 $\delta > \delta'$ ナ ル ト キ

$$\sigma < \sigma'$$

ト 考 ヘ レ バ, directed set ト ナ ル.

f ナ 興 ヘ ラ レ タ a. p. function ト シ

$$Pf_{k_1, \dots, k_n} = \sum_{l=1}^n Pf_{k_l}$$

又

$$\Delta f_{\sigma}(x) = \Delta f_{k_1, \dots, k_n, \delta}(x) = \Delta_{\delta}(Pf_{k_1, \dots, k_n}; x)$$

ト オ ク. 然 ル ト キ k_l ナ σ = 命 ス レ ル index ノ ツ ト
ス レ バ

$$\begin{aligned}
 |\Delta f_{\alpha} \times f(x) - f(x)|_{k_l} &= \left| \sum_y M_y \Delta f_{\alpha}(xy^{-1}) f(y) - f(x) \right|_{k_l} \\
 &= \left| \sum_y M_y \Delta f_{\alpha}(xy^{-1}) (f(y) - f(x)) \right|_{k_l} \leq \sum_y M_y |\Delta f_{\alpha}(xy^{-1})| |f(y) - f(x)|_{k_l}
 \end{aligned}$$

∴ 於て

$$\Delta f_{\alpha}(xy^{-1}) \neq 0 \text{ ならば}$$

$$|f(y) - f(x)|_{k_l} \leq \rho_f k_l, \dots, (x \ y) \leq \delta$$

∴ アルカラ

$$|\Delta f_{\alpha} \times f(x) - f(x)|_{k_l} \leq \delta \quad (1 \leq l \leq h)$$

スナハチ

$$\text{定理 1. } \lim_{\alpha} \Delta f_{\alpha} \times f(x) = f(x) \quad (\text{一様収斂})$$

然ルニ

$$\Delta f_{\alpha} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{\alpha\nu} l_{\alpha\nu}(x)$$

ハ絶対且ツ一様ニ収斂シテキルカラ, N_{α} ヲ充分大キクト

ツテ

$$\left| \Delta f_{\alpha}(x) - \sum_{\nu=1}^{N_{\alpha}} \alpha_{\alpha\nu} l_{\alpha\nu}(x) \right| < \delta$$

ナラシメルコトが出来ル。コレヲ上ノ式ニ入レレバ

$$\left| \sum_{\nu=1}^{N_{\alpha}} \alpha_{\alpha\nu} l_{\alpha\nu} \times f(x) - f(x) \right|_{k_l} \leq \delta (1 + M_{\alpha} |f(x)|_{k_l})$$

故ニ

$$\text{定理 2. } \lim_{\alpha} \sum_{\nu=1}^{N_{\alpha}} \alpha_{\alpha\nu} l_{\alpha\nu} \times f(x) = f(x) \quad (\text{一様収斂})$$

コトヲ明ラカニ

$$L_{\sigma_n} \times f(x) = n^{(\sigma_n)} \sum_{i,j} \left(M_y f(y) \overline{d_{i,j}^{(\sigma_n)}(y)} \right) d_{i,j}^{(\sigma_n)}(x)$$

デアルカラ，定理2の a. p. + $f(x)$ の unitary 表現，
一次結合，limit + コトが合ル。