



Title	ぢをふぁんたす近似論ニ於ケル最近ノ研究（第三報）
Author(s)	武隈, 良一
Citation	全国紙上数学談話会. 1940, 197, p. 176-182
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74785
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

855. ちをふあんたす近似論ニ於ケル最近ノ 研究(第三報)

武隈 良一 (北海道
室蘭中學)

はじめに

第一報ハ東京物理學校雜誌第572号(昭和十四年七月
号)ニ掲載サレ其ノ内容ハ次ノ通りデアリマス。

1. Hurwitz ノ定理ノ二次虚數体ニ於ケル擴張。
2. 非同次一次式ノ絶對値ノ大キサニ就テ。
3. 几个ノ非同次一次式ノ不定近似。

第二報ハ日本中等教育數學會雜誌第二十一卷第六号(昭和十四
年十二月発行)ニ掲載サレ其ノ内容ハ Mordell ノ問題ヲ
論ジタモノデアリマス。以下其ノ後ノ發展並ニニ既報ニ洩レ
タ重要事項ヲ述べサセテ頂キマス。

X X X X X X X

1. Kronecker / 定理 / 証明

コ、= Kronecker / 定理トイフ / ハ次 / 有名ナ定理ヲサス。

定理. $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ が一次的 = 独立ナ實數ナルトキ, $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N$ ヲ任意ノ實數, ε ヲ任意ノ小ナル正數トスルトキ, 適當ノ實數 t , 整數 $A_1, A_2, \dots, A_N$ ヲ見出シテ

$$|\lambda_n t - \phi_n - A_n| < \varepsilon \quad (n=1, 2, \dots, N)$$

ヲラシメル事が出來ル。

コノ定理ノ証明ハ非常ニ多クアルト聞イテマスガ以下ノ論文ニ示サレタ以外ニ興味深キモノガアルアセウカ、若シアツタナラバ御教示ヲ仰ギタイト思ヒマス。

1. Weyl. Math. Annalen 77 (1916)

331 — 352

2. Bohr. Proc. Lon. Math. Soc. (2) 21 (1922)
315 — 316.

3. Lettenmeyer. 同上 306 — 314.

4. Bohr ト Jensen. Journal London Math. Soc. 7 (1932) 274 — 275.

5. Estermann. 同上 8 (1933) 18 — 20.

6. Bohr. 同上 9 (1934).

2. Oppenheim / 定理

二次虚数体 $K(\sqrt{-m})$ 於て m が與へ、 α は任意
の複素數 $\alpha = \rho + i\eta$

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{\gamma}{|q|^2}$$

ヲ満足スル數体 $K(\sqrt{-m})$ の整數 p, q ($q \neq 0$) の組が無
限ニ存在スルヲ示シ且ツソレニ反シアル複素數 $\beta = \rho + i\eta$

$$\left| \beta - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{\gamma - \varepsilon}{|q|^2} \quad (\varepsilon > 0)$$

が有限個シカ組ヲ持タナイヲ示シ γ 如何ニ定ムベキカ
トイフ問題ニ對シテハ既ニ第一報第一章ニ於テ *Nikolai*
が結論ヲ與ベテ居ルが其ノ後 *Oppenheim* の *Mh. Math*
Phys. 46, 196 (1937) ニ於テ次ノ如ク拡張シテ居ル。

定理

$$m \equiv 3 \pmod{4} \text{ ナルトキ } \mu = \frac{1}{2}$$

$$m \not\equiv 3 \pmod{4} \text{ ナルトキ } \mu = 1$$

トセバ

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{\sqrt{\frac{\mu^2 m}{2}}}{|q|^2}$$

ヲ満足スル數体 $K(\sqrt{-m})$ の整數 p, q の組ハ無限ニ存
在スル。

證明ハ二次形式論ノ定理ニヨル。

3. 三ツノ一次同次式ノ積

例へバ $|ax^2 + 2hxy + by^2|$ が $x, y \neq 0$ の正の整数値 = 對シテナルベク小ナラシムルコトトイフ二次ノ問題 = 就テハ次ノ諸定理カアル。

定理1. $\Delta = ab - h^2 > 0$ ナルトキ

$$|ax^2 + 2hxy + by^2| \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\Delta}$$

ナラシムル x, y ノ整数値が存在スル。

定理2. $\Delta = ab - h^2 < 0$ ナルトキ

$$|ax^2 + 2hxy + by^2| \leq 2\sqrt{\frac{\Delta}{5}}$$

ナラシムル x, y ノ整数値が存在スル。

定理3. (Minkowski)

$$|(ax + by + c)(a'x + b'y + c)| \leq \frac{|ab' - a'b|}{4}$$

ナラシムル x, y ノ整数値ノ組ハ無數ナル。

コノ Minkowski ノ定理ノ証明ハ彼ノ著書 *Diophantische Approximationen* 45 頁ニアルガ最近 Askar が *Math. Annalen* 115 (1938) = 於テ新シイ証明ヲ與ヘテ居ル。

サテ二次ノ問題ハソノ性質上 一次ノ問題ト甚ク類似シテ居ルガ三次以上ノ場合トナルト特殊ナ困難ヲ伴ツテ來ル。ソノ三次ノ場合ニ對シテ Davenport が *Journal London Math. Soc.* 13 (1938) = 於テイササカ解決ヲ與ヘテ居ルノヲ以下ニ述ベヤウト思フ。

今 ξ, η, ζ は x, y, z に関する一次同次式を表はす
 ϵ のトシソノ行列式ノ値ハ 1 ナリトス。 x, y, z が全部ハ 0
 デナイ整数ナルトキ

$$M = \min |\xi \eta \zeta| \dots\dots\dots (1)$$

トオケバ Minkowski ノ結果*

$$\min (|\xi| + |\eta| + |\zeta|) \leq 3 \left(\frac{4}{19} \right)^{\frac{1}{3}} \dots\dots\dots (2)$$

$$\therefore \text{ヨリ } M \leq \frac{4}{19} \left(= \frac{1}{4.75} \right) \dots\dots\dots (3)$$

ナルコトハ良ク知ラレテルコトデアル。

Davenport ハ

$$M \leq 8 \left((3 + \sqrt{2}) \sqrt{2\sqrt{2}-1} + 1 \right)^{-2} = \frac{1}{6.07} \dots\dots\dots (4)$$

ナルコトヲ証明シタノデアアル。ソノ爲ニ次ノ Lemma ヲ先
 ズ証明シソレヲ用ヒタノデアアル。

Lemma

$$\min_{u, v > 0} \left\{ u + v + \max \left(\frac{1}{uv}, \frac{1}{|(u-1)(v-1)|} - 1 \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left((3 + \sqrt{2}) \sqrt{2\sqrt{2}-1} + 1 \right) = 3.484 \dots\dots$$

Lemma ノ証明ハ省キ直チニ Davenport ノ定理ノ
 証明ニ入ラズ。

先ヅ任意ニ小ナル正数 ϵ ニ對シテ

$$M \leq |\xi_0 \eta_0 \zeta_0| < M(1 + \epsilon)$$

ヲ満足スル如キ ξ, η, ζ ノ値 ξ_0, η_0, ζ_0 が存在スル。但シ $x, y,$

*) 彼ノ全集第二卷 3—42 ヲ見ヨ。

8, 整数値ハ全部ハ0 ナイトス。今

$$P = |\xi_0 \eta_0 \zeta_0|^{\frac{1}{3}} \dots\dots\dots (5)$$

トスルトキ ξ, η, ζ ヲ $\frac{\xi P}{|\xi_0|}, \frac{\eta P}{|\eta_0|}, \frac{\zeta P}{|\zeta_0|}$ = ヨツテ

置換出來ルカラ

$$|\xi_0| = |\eta_0| = |\zeta_0| = P$$

トオイテモ一般性ハ失ハレナイ。從ツテ P ハ

$$M \leq P^3 < M(1 + \varepsilon)$$

ヲ満足スル。サテ

$$|\xi| + |\eta| + |\zeta|$$

ヲ考ヘヤリ。コノ式ガ正ノ極小値ヲトルトキノ格子点ヲ
 (x_1, y_1, z_1) トシ又 (x_2, y_2, z_2) ハ $(0, 0, 0)$ ト
 (x_1, y_1, z_1) ト共ニ一直線上ニナイ点トシコノ制限ノ下
ニソノ点ニ於テ上式ハ極小値ヲトルモノトス。次ニ (x_3, y_3, z_3) ハ
 $(0, 0, 0)$ (x_1, y_1, z_1) (x_2, y_2, z_2) ト共
ニ同一平面上ニナイ点トシ、コノ制限ノ下ニソノ点ニ於テ上
式ハ極小値ヲトルモノトス。

ξ_i, η_i, ζ_i ヲ x_i, y_i, z_i = 對應スル ξ, η, ζ
ノ値トシ

$$3S_i = |\xi_i| + |\eta_i| + |\zeta_i|$$

トセバ Minkowski ノ定理^{*}ニヨリ

$$(3S_1)(3S_2)(3S_3)J \leq 8 \dots\dots\dots (6)$$

ナリ。茲ニ J ハ八面体 $|\xi| + |\eta| + |\zeta| \leq 1$ ノ体積デアル。

* 彼ノ著書 Geometrie der Zahlen (1910) 第五章ヲ見ヨ。

$$J = \frac{8}{\delta} \text{ なる故 特 } =$$

$$S, S_2^2 \leq \frac{2}{9} \dots \dots \dots (7)$$

トナル。從テ算術及ビ幾何平均ノ不等式ニヨリ

$$M \leq S_1^3$$

トナル。 $(\xi_1, \eta_1, \zeta_1), (\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$ ノ少クとも一ツハ $(\xi_0, \eta_0, \zeta_0), (-\xi_0, -\eta_0, -\zeta_0)$ トハ相異ナツテ居ル。今 $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \neq (\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$ トシテモ一般性ハ失ハレナイ。カテ ξ_0, ξ_i ハ同符号, η_0, η_i ハ同符号トナル。茲ニ i ハ 1 又ハ 2 デアル。次ニ $\xi_i - \xi_0, \eta_i - \eta_0, \zeta_i - \zeta_0$ ハ x, y, z ノ全部ガ 0 ナク、イ 整数ナルトキ、 ξ, η, ζ ノ値ナル故

$$|(\xi_i - \xi_0)(\eta_i - \eta_0)(\zeta_i - \zeta_0)| \geq M$$

$$\text{從テ } |(|\xi_i| - p)(|\eta_i| - p)(|\zeta_i| + p)| \geq M,$$

トナル。今

$$u = \frac{|\xi_i|}{p}, \quad v = \frac{|\eta_i|}{p}, \quad w = \frac{|\zeta_i|}{p}$$

$$\text{トセバ } uvw \geq \frac{1}{1+\varepsilon}$$

$$|(u-1)(v-1)(w+1)| \geq \frac{1}{1+\varepsilon}$$

$$u+v+w = \frac{3S_i}{p} \leq \frac{3S_2}{M^{\frac{1}{3}}}$$

$$\leq \frac{3}{M^{\frac{1}{3}}} \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^{\frac{1}{2}} \leq 3 \frac{\left(\frac{2}{9}\right)^{\frac{1}{2}}}{M^{\frac{1}{2}}}$$

ε の任意 = N なる正数 + ルヲ以テ Lemma = ヨ

リ

$$3 \frac{\left(\frac{2}{9}\right)^{\frac{1}{2}}}{M^{\frac{1}{2}}} \geq \min_{u,v>0} \left\{ u+v + \max \left(\frac{1}{uv}, \frac{1}{|(u-1)(v-1)|} - 1 \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left((3+\sqrt{2}) \sqrt{2\sqrt{2}-1} + 1 \right)$$

コレヨリ定理ノ結果ヲ得。

4. 和算 = 於ケル不定近似

和算 = 於テモ ぢをふあしたす近似論が論ジラレテ居ツタトノ意見が近頃藤原博士 = ヨツテ + サレマシタ。ソレハ建部賢弘著ノ累約術デアツテ次ノ三問題ヲ論ジラルトノコトデス。

- 1) $|x - \alpha y| < \varepsilon$
- 2) $|x - \alpha y + \beta| < \varepsilon$
- 3) $|x - \alpha y - \beta| < \varepsilon$

α, β の實數, x, y は整數。

實 = 関孝和ノ行列式ト共 = コノ建部賢弘ノ累約術ハ日本數學ノ世界 = 誇ル = 足ルモノデアリマス。詳細ハ次ノ諸雜誌ヲ参照サレタイ。

1. 大塚數學會誌 (10年 / 月号)
2. Proceeding of the Imperial Academy 第15卷第5号 (1939) (以上)