



Title	"Einreihig" 並ビニ Generalized "Einreihig" Ring ニツイテ
Author(s)	中山, 正
Citation	全国紙上数学談話会. 1940, 197, p. 192-198
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74788
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

858. "Einreihig" 並ビ = Generalized
"einreihig" Ring = ツイテ

中山 正 (阪大)

On Frobeniusean algebras, I (アナルス, 40)
及ビ II (近刊) = ツイテノ補足的注意ヲ一ニシタイト思ヒ
マス。ソコデ Frobeniusean ring ノ一般論ノ應用
トシテ次ノコトヲ証明シマシタ (I, 定理 10; II, 定理
16):

定理 I 環 A = オイテ如何ナル両側いでやる子モ
(principal テ) $\mathfrak{f} = A\mathfrak{c} = \mathfrak{c}A$ ナル形ニカケルナラバ,
 A ノ如何ナル剰餘環モふりべにうす的 (Frobeniusean)
ナル。 (逆モ成立)

但シコソデ、マタ以下スベテ、環ト云フノハ **両方ノ連鎖**
律ヲ充スモノトスル。ふりべにうす環ノ一般ノ定義ハ一
寸面倒 (II, Chap. II) デスガ、特ニ多元環ノ場合ニハ
右ト左ノ二ツノ正規表現が同値ナ (ソシテ主單位元ヲモツ)
コトデアリマス。

然ルニ 浅野氏ハ Über verallgemeinerte
Abelsche Gruppe (輯報, 15) デ

定理 2 環 A = 於テスベテノ両側いでやる子が
 $\mathfrak{f} = A\mathfrak{c} = \mathfrak{d}A$ ($\mathfrak{c}$ ハ $\mathfrak{d}$ ト異ツテヨイ) ト表ハセルナラバ,
 A ハ Kothe ノ意味デ einreihig デイル。 (逆モ勿
論成立)。

ヲ証明サレタ。einreihig + 環ト 先ッ

a) *primär* + 環ノ直和 = 分解サレ, 且ッ

b) *primitive* + 巾等元 e デ作ラレタ右及ビ左いで
やる eA , Ae が常ニタビーツノ組成列ヲモツ如キモノデア
リマス。(G. Köthe, Zeitschr. 39)

表面上大分異ツテ居リマスが実ハ上ノ 1, 2 ハ実ハ同シ
事實ニ帰スルノデアリマス。即チ私ノハ浅野サンノ定理ノ別
証明ヲ與ヘタコトニナリマス。(コノ定理ダケヲ問題ニスレ
バ長スヤル別証明デスガ。) ソレハ先ヅスベテノ剩餘環カふ
るべにうす角トイフコトト、*einreihig* デアルコトガ一
致スルノハふるべにうす環ノ構造論カラ容易ニ判リマスカラ
ソレハ今略シマス。

ソシテ浅野サンノ弱イ條件カラ私ノ強イノガ直チニ出
ルコトヲ辨解 (逆ヲ問題ニスル時ハ亦解デハナイデセウカ)
サセテイタビキマス。即チ次ノ様ナ一付面白い事 (或ヒハ既
ニヨク知ラレタコトダツタカモ知レマセンガ) がアリマ
ス。

補題 環 (両連鎖律ヲミタス) A が主単位元ヲモツ
トシ, γ ノアル両側いでやる γ が $\gamma = Ac = \alpha A$ ナル形デ表
セレバ $\gamma = cA = Ad$ デモアル。

証明 ハ單ニ組成列ノ計算ニヨリマス。今 A ノ左加群
 m ノ組成列ノ長サヲ $[m]$ デアラハス。 $a \rightarrow ac$ ($a \in A$)
ナル對應カラ容易ニ $\gamma = Ac$ (左いでやるトシテ) が $A/\ell(c)$
 $= A/\ell(cA)$ ト自型ニナル。タビシ $\ell(*)$ ハ $*$ = 左カラ乗

$\mathcal{O} = \text{ナル } (A,) \text{ 元全体ノナス左いでやるトナル, シ}$
 $\text{カル} = cA \subseteq \mathcal{O} \text{ ナルユトハ明カデアリマスカラ, } \ell(cA) \geq \ell(\mathcal{O}).$
 ヨツテ結局

$$[\mathcal{O}] \leq [A/\ell(\mathcal{O})]$$

ナル式ヲ得ル. 他方, $\alpha \rightarrow \alpha d = \text{ヨツテ判ル如ク } Ad \text{ ハ}$
 $A/\ell(\alpha A) = \ell/\ell(\mathcal{O}) = \text{同型ナル. シカル} = Ad \subseteq \mathcal{O}.$
 ヨツテ

$$[\mathcal{O}] \geq [Ad] = [A/\ell(\mathcal{O})]$$

ニツノ不等式ヲ比べレバスベテノ等号、特 $[\mathcal{O}] = [Ad]$,
 ヨツテ $\mathcal{O} = Ad$ デナケレバナラヌ事が判ル.

同様ニシテ $\mathcal{O} = cA$.

次ニ Generalized "einreihig" ring =

ツイテノ注意ヲーツ. Gen. "einreihig" ring ハ
 einreihig ノ拡張トシテ前出ノ條件ノ a), b) ノ中. 少
 シ強引スガル a) ヲ除イテ、b) ガケテ假定シタモノ (タジ
 シ主単位元ノ存在ハマハリ假定) トシテ導入シマシタ. 然モ
 K tthe ノ 主定理 デアツタ所ノ「イカナル左加群モ
 cyclic デシカモ Ae (e ハ primitive ナ巾等元) ト
 homomorphic ナルマウナ加群ノ直和ニ分解サレル”
 トイフコトガ保持サレテキルコトヲ証明シマシタ (多元環ニ
 ツイテハ I, 定理 11, 一般ニツイテハ II, 定理 17). 右
 加群ニツイテモ勿論同様ノ性質ガアリマス. 然モ (左, 右
 両方同時ニトレバ) ソノ逆ニ成立シマス. ソノコトハ多元環
 ニツイテハ既ニ II ノ最後ニ述ビ注意シテオキマシタガ、實

ハ一般ノ場合デモヨイコトニ氣付キマシタ。ソノ証明ノ大略ヲ述ベマス。

先ツ A が上記ノ性質、特ニイカナル直既約ノ左加群モ Ae (e ハ適當ノ primitive idempotent) = homomorphic, 同様ニイカナル直既約右加群モ eA = homomorphic トイフ性質ヲモツトスル。 (Ae, eA = homomorphic トイフ代リニ 唯一ツノ maximal ノ部分加群ヲ有ツト云ツテモヨイ)。

然ルトキ A が *Gen. einreihig* ナルコトヲ云ヒタイノデアアルガ、ソレニハ如何ナル primitive idempotent e' ヲツツテモ Ae' がタビーツノ組成列ヲモツ事、即チ $N^{i-1}e'/N^ie'$ ナル剰餘加群が常ニ (0 デナケレバ) 單純ナルコト及ビ右加群ニ對スル同様ノコトヲイヘパヨイ。タビシ茲ニ N ハ A ノ Radical トスル。

假リニソウデナイトシテ、アルーツノ i ニツイテ $N^{i-1}e'/N^ie'$ ナル完全可約加群ガニツ以上ノ單純加群ニワカレルトシ、ソノ任意ノニツ m_1, m_2 ヲトル。更ニココデ i ハ上ノ如キ事ノオコル最初ノモノトシテオク。從ツテ $N^{j-1}e'/N^je'$ ($j < i$) ハスベテ單純デアルトスル。(コノ假定ノ下ニ $N^{i-1}e'/N^ie'$ が Ae'/N^ie' ノ最大完全可約部分群ナルコトガ容易ニ分ル)。

1) $m_1 \neq m_2$ ノ場合。ニツノ primitive ノ中等元 e_1, e_2 ヲ $m_1 \cong Ae_1/Ne_1, m_2 \cong Ae_2/Ne_2$ ナル如クトル。而シテ新ニツノ 右加群

$$n_1 = e_1 A / e_1 N^i, \quad n_2 = e_2 A / e_2 N^i$$

ヲ考へル。 $m_1 \cong A_{e_1} / N_{e_1}$ カラ $e_1 N^{i-1} e' \nsubseteq N^i$, ヨツテ n_1 / 完全可約約群 $e_1 N^{i-1} / e_1 N^i$ / 中 = $e' A / e' N$ ト同型 + 単純約群ガ少クモ一ツ存在スル。ソレヲ σ_1 トスル。同様 = n_2 ハ $e' A / e' N$ ト同型 + 単純群 σ_2 ヲ含ム。ソコニ今 σ_1 ト σ_2 ヲ identify シテ ($\sigma_1 \cong \sigma_2$ ナルコト = 注意), 新 = 一ツノ右加群 n ヲ得ル:

$$n = (n_1, n_2), \quad n_1 \cap n_2 = \sigma_1 = \sigma_2$$

シカルトキコノ n が 直既約 = ナル / デアル。然レソノ証明ハ一寸面倒 (但シ要スル = 簡單 + 群論的考察) ガカラ省略シマス。

他方 n / nN が單純デナイコトカラ n ハ決シテ primitive ナ中零元デ作ラレタ右いでや $\bar{n}$ = homomorphic = ナリ得ナイ。ヨツテコノ Case 1) ハ排除サレヌベナラヌ。

2) $m_1 \cong m_2$ / 場合。今 $m = A e' / N^i e'$ ($\cong m_1, m_2$) トオキ更 = 他 = モウ一ツコレト同型 + 群 m^* ヲ考へル。而シテ $m^* =$ 於テ $m_1, m_2 =$ 對應スル部分加群ヲ m_1^*, m_2^* トスル。シカルトキ m_2 ト m_1^* トヲ identify シテ (suffix = 注意!!) 一ツノ新シイ加群 $\hat{m}$ ヲツクル。

$$\hat{m} = (m, m^*), \quad m \cap m^* = m_2 = m_1^*$$

シカラバコノ左加群 $\hat{m}$ が直既約 = ナル。ソノ証明 = ツイテハ、タトヘバ上記 Käthe ノ論文、或ハ (彼ノ弟子)

14. Brummund 1. Dissertation "標数 p の係数
体 = 於ル 群環 = ツイテ" を参照。

他方この場合モ $\widehat{m}$ は primitive と中等元ノツクル
principal と左いで $\varphi = \text{homomorphic} = +$ ラ
ス事ハ明カ。ヨツテ 2) モ不可能。

結局矛盾ニ到達シ、 A が *Gen. einreihig* ナル
コトガリカル。

次ニ上記ノ事ニ関連シテ注意ヲ一ニニ述ベル。モトモト
einreihig 環ハ *Köthe* が単因子論ノ拡張ノ意味ヲ導
入シタノデアツタガ、彼ハ"スベテノ左マタハ右加群ガ
cyclic ナ群ノ直和ニ分解サレル様ナ環ハ?"ト自問シ
タ。單ニ *cyclic* ナ群トイフバカリデナク、最大ノ部分群
ガ唯一ツト云フ條件ヲツケレバ上記ノ如ク逆ノ方モ、シタガ
ツテ問題ガ完全ニ我々ノ *generalized "einreihig"*
環ヲ解決サレル。(シカモ附加シテ條件ハ単因子論ノ拡張
ノ上カラ見テモ不自然ノモノデハナイ)。シカシ *Köthe*
ノ問ノマデハ問題ハ未ダ残ル。(特ニ可換ナ環ニノミ限
レバソレハ既ニ *einreihig* ナ環ヲ解決サレテキルコトハ
Köthe ガ既ニ述ベテキル如クデアル) 現ニソノ如何ナル
左又ハ右加群ニ *cyclic* ナモノノ直和ニナリ。シカモ
Generalized "einreihig" デナイ環ガ存在スル。
タトヘバ

$$\begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

ナル行列全体ノナス多元環ガサラデアアル。(証明省略)

更ニ、上記ノ Brummund ノ論文ヲ標数 p ノ体ノ
上デハ Cyclic ナイ p -group ハ常ニ イクラデモ大キ
ナ直既約 ナ表現ヲモツコトヲ述ベテキル。彼ノ論法ヲツカ
フト、アル適当ナ primitive 巾等元 e ニ對シテ、且
ニアレ index $i =$ 對シテ $N^{i-1}e / N^i e$ (N ハ radical)
ナル完全可約左加群ガ少クモ ニツ互ニ同型ナ單純部分加群ヲ
フクメバ、ソウスレバイクラデモ大キナ直既約ナ左加群ガ
存在スルコトガワカル。

然ラバ、イクラデモ大キナ直既約左又ハ右加群ヲモタナ
イ環ノ一般ナモノハ? トイフ問題ガ起ル。上ノ條件ト
generalized "einreihig" ナ條件トノ間ニハ勿論
未ダ大キナ間隙ガアリ、generalized "einreihig"
ナル概念ハ(上ノ Köthe ノヲサヘ解決シナイノ故カラ
a fortiori =) コノ問題ニモ未ダ無力デアアル。モシ
コレヲノコトニ關シテ何等カノ御教示ヲイタジケレバ幸甚ニ
思ヒマス。