



Title	Hilbert space ニ於ケル一定理ノ証明
Author(s)	中野, 秀五郎
Citation	全国紙上数学談話会. 1940, 198, p. 203-205
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74790
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

860. Hilbert space = 於ケル一定理ノ証明

中野 秀五郎 (東大)

過日私が此誌上ニテ次ノ定理ヲ証明シタ。

定理. M, N ヲ closed linear manifold.

P_M, P_N ヲ 夫々 其ノ Projection operators トシ、 M, N ノ Durchschnitt $M \cap N$ ノ Projection operator ヲ $P_{M \cap N}$ トスレバ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (P_M P_N)^n = P_{M \cap N}.$$

ナリ。

私ハ bounded Hermitean operator ノ spectralization ヲ利用シテ証明シタガ、角谷君ガ、其レニ對シ、Spectralization ヲ用ヒナイ別証明ヲ與ヘラレタ。此處ニ又新シイ別証明ヲ得タノデ書クコトニスル。

証明ニハ次ノ補助定理ヲ使用スル。

補助定理. Hilbert space ノ elements $f_1, f_2, \dots$ ガ bounded = シテ、然カモ總テノ m = 對シ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n, f_m)$$

ガ存在スルナレバ、 $f_1, f_2, \dots$ ハ weakly = converge スル。

此ノ補助定理ハ次ノ如ク簡單ニ証明サレル。即チ先ヅ $f_1, f_2, \dots$ = テ aufspannen サレタ closed linear

manifold 内、 $\ni$ ニテ考ヘレバ、 $f_1, f_2, \dots$ ハ此ノ manifold 内、überall dicht + element g ニ對シ、 $\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n, g)$ カ存在シ、然カモ $f_1, f_2, \dots$ ハ bounded Rieszノ定理カラ此ノ manifold 内ニテ weakly = converge スルコトガ証明出來ル。從ツテ一般ニ weakly = converge スル。

今 $H = P_n P_m P_n$ トスレバ、任意ノ element f ニ對シ、 $\|Hf\| \leq \|f\|$ 、從ツテ $\|H^n f\| \leq \|H^{n-1} f\|$ 。又

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (H^{2n} f, H^{2m} f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|H^{m+n} f\|^2$$

ニテ limit カ存在ス。故ニ上ノ補助定理ニヨリ $H^{2n} f$ ハ weakly = converge スル。其ノ weak limit f_0 トスレバ

$$\begin{aligned} (H^2 f_0, g) &= (f_0, H^2 g) = \lim_{n \rightarrow \infty} (H^{2n} f, H^2 g) \\ &= (f_0, g) \end{aligned}$$

從ツテ

$$H^2 f_0 = f_0$$

故ニ

$$\begin{aligned} \|H^2 f_0\| &= \|P_n P_m P_n P_m P_n f_0\| \leq \|P_m P_n P_m P_n f_0\| \\ &\leq \dots \leq \|f_0\| \end{aligned}$$

ヨリ

$P_n P_m P_n P_m P_n f_0 = P_m P_n P_m P_n f_0 = \dots = P_n f_0 = f_0$ ヲ得ル。從ツテ $P_m f_0 = f_0$ 、 $P_n f_0 = f_0$ 故ニ $P_m P_n f_0 = f_0$ ナリ。

今 $P_m n f = 0$ かつ $f \neq 0$ である

$$\begin{aligned}(P_m n f_0, g) &= (f_0, P_m n g) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (H^{2n} f, P_m n g) = 0\end{aligned}$$

故に

$$f_0 = P_m n f_0 = 0$$

従って

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (H^{2n} f, f) = (0, f) = 0$$

即ち

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|H^n f\|^2 = 0$$

故に $H^n f$ は δ strongly $= 0$ に converge する。又

$P_m n f = f$ かつ $f \neq 0$ である。即ち $H^n f$ は δ strongly $= f$ に converge する。故に任意の f に対して

$$\begin{aligned}H^n f &= H^n P_m n f + H^n (1 - P_m n) f \\ &\rightarrow P_m n f \text{ (strongly)}\end{aligned}$$

かつ $\|f\| \neq 0$ 故に

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} (P_m P_n)^n f &= P_m \lim_{n \rightarrow \infty} H^{n-1} f = P_m P_m n f \\ &= P_m n f.\end{aligned}$$

を得る。