OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	Hilbert space ニ於ケル一定理ノ証明
Author(s)	中野, 秀五郎
Citation	全国紙上数学談話会. 1940, 198, p. 203-205
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74790
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

860. Hilbert space ニ於ケル一定理ノ証明

中野 秀五郎 (東大)

過日私が此誌上ニテ次ノ定理ヲ証明シタ。

定理. $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ ヲ closed linear manifold. $P_{\mathfrak{M}}, P_{\mathfrak{N}}$ ヲ夫々其ノ Projectionoperators トシ、$\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ ノ durchschnitt $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$ ノ Projectionoperator ヲ $P_{\mathfrak{M}\mathfrak{N}}$ トスレバ

$$\lim_{n\to\infty} (P_{\mathfrak{M}} P_{\mathfrak{N}})^n = P_{\mathfrak{M}\mathfrak{N}}.$$

ナリ。

私ハ bounded Hermitean operator ノ spectralization ヲ利用シテ証明シタガ、角谷君ガ、其レニ對シ、Spectralization ヲ用ヒナイ別証明ヲ與ヘラレタ。此處ニ又新シイ別証明ヲ得タノデ書クコトニスル。

証明ニハ次ノ補助定理ヲ使用スル。

補助定理. Hilbert space ノ elements $f_1, f_2, \cdots\cdots$ ガ bounded ニシテ、然カモ總テノ m ニ對シ

$$\lim_{n\to\infty} (f_n, f_m)$$

ガ存在スルナレバ、$f_1, f_2, \cdots\cdots$ ハ weakly ニ converge スル。

此ノ補助定理ハ次ノ如ク簡單ニ証明サレル。即チ先ヅ $f_1, f_2, \cdots\cdots$ ニテ aufspannen サレタ closed linear

manifold 内ノミニテ考ヘレバ，$f_1, f_2, \cdots\cdots$ ハ此ノ manifold 内ノ überall dicht + element g ニ對シ，$\lim_{n\to\infty}(f_n, g)$ が存在シ、然カモ $f_1, f_2, \cdots\cdots$ ハ bounded Riesz ノ定理カラ此ノ manifold 内ニテ weakly = converge スルコトが証明出來ル。從ッテ一般ニ weakly = converge スル。

今 $H = P_{n_2} P_{m_2} P_{n_1}$ トスレバ，任意ノ element f ニ對シ、$\|Hf\| \leqq \|f\|$，從ッテ $\|H^n f\| \leqq \|H^{n-1} f\|$、又

$$\lim_{n\to\infty}(H^{2n}f, H^{2m}f) = \lim_{n\to\infty}\|H^{m+n}f\|^2$$

ニテ limit が存在ス．故ニ上ノ補助定理ニヨリ $H^{2n}f$ ハ weakly = converge スル。其ノ weak limit ヲ f_0 トスレバ

$$(H^2 f_0, g) = (f_0, H^2 g) = \lim_{n\to\infty}(H^{2n}f, H^2 g)$$
$$= (f_0, g)$$

從ッテ

$$H^2 f_0 = f_0$$

故ニ

$$\|H^2 f_0\| = \|P_{n_2} P_{m_2} P_{n_1} P_{m_2} P_{n_1} f_0\| \leqq \|P_{m_2} P_{n_1} P_{m_2} P_{n_1} f_0\|$$
$$\leqq \cdots\cdots \leqq \|f_0\|$$

ヨリ

$$P_{n_2} P_{m_2} P_{n_1} P_{m_2} P_{n_1} f_0 = P_{m_2} P_{n_1} P_{m_2} P_{n_1} f_0 = \cdots\cdots = P_{n_1} f_0 = f_0$$

ヲ得ル。從ッテ $P_{m_2} f_0 = f_0$, $P_{n_1} f_0 = f_0$ 故ニ $P_{m_2 n_1} f_0 = f_0$ ナリ。

今 $P_{mn}f=0$ トルfヲ考フレバ

$$(P_{mn}f_0,\ g)=(f_0,P_{mn}g)$$
$$=\lim_{n\to\infty}(H^{2n}f,P_{mn}g)=0$$

故ニ

$$f_0=P_{mn}f_0=0$$

然ツテ

$$\lim_{n\to\infty}(H^{2n}f,f)=(0,f)=0$$

即チ

$$\lim_{n\to\infty}\|H^nf\|^2=0$$

故ニ H^nf ハ strongly $=0$ ニ converge スル。又 $P_{mn}f=f$ トルf=對シテハ、明カニ H^nf ハ strongly $=f$ ニ converge スル。故ニ任意ノ f=對シテハ

$$H^nf=H^nP_{mn}f+H^n(1-P_{mn})f$$
$$\longrightarrow P_{mn}f\ (\text{strongly})$$

トナル。故ニ

$$\lim_{n\to\infty}(P_mP_n)^nf=P_m\lim_{n\to\infty}H^{n-1}f=P_mP_{mn}f$$
$$=P_{mn}f.$$

ヲ得ル。