



Title	Fourier series と Fourier transform とノ関係 II
Author(s)	河田, 龍夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1940, 198, p. 211-214
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74792
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

862. Fourier series と Fourier transform との関係 II

河田 龍夫 (仙台高工)

1. I = 於て証明シタ Fourier series と Fourier transform との関係 = 関スル定理ヲ用ヒテ, Fourier series / Hausdorff - Young, 定理カラ Fourier transform = 関スル Titchmarsh, 定理ヲ証明スル. (Titchmarsh 自身 $\in$ Fourier series / Hausdorff - Young, 定理 = reduce シテ証明シタノデアルガ, コノデアルノトルシ異フ。

一般, Fourier transform と Fourier series

ノ関係ヨリ出スト云フ意味デ面白ク+イコトモ+カロウト思ハレル)

Theorem 4. $f(x) \in L_p(-\infty, \infty)$, $1 < p \leq 2$ トレ.

∨ Fourier transform $\mathcal{F} F(t)$ トスルト

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} |F(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \leq A_{q,p} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right)$$

$A_p \wedge p = 1 \ni$ depend $\mathcal{F}$ function $f = \wedge$ independent + 常数.

Proof. $\varphi(t)$ $\mathcal{F}$ period $2R$, periodic function $\mathcal{F}(-R, R) \mathcal{F} F(t)$ ト一致スルトスル. C_n $\mathcal{F} \varphi(t)$ / Fourier coeff $\frac{1}{2R} \int_{-R}^R \varphi(t) e^{-i n t} dt$ トスルト Hausdorff - Young's Theorem = $\exists$ //

$$(1) \left(\frac{1}{2R} \int_{-R}^R |\varphi(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \leq A_p \left(\sum |C_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

故 =

$$\left(\int_{-R}^R |F(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_{-R}^R |\varphi(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \leq A_p R^{\frac{1}{q}} \left(\sum |C_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

I, 定理 I = $\exists$ //

$$\leq A_p R^{\frac{1}{q}} \left(\frac{A_p}{R^{p-1}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= A_p \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

故 =

$$\left(\int_{-R}^R |F(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \leq A_p \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

A_p は $p=1$ に depend して function = depend して
+1 かつ $R \rightarrow \infty$ depend して +1.

$R \rightarrow \infty$ トスレバ 吾々ノ定理 4 ヲ得ル。

2. Theorem 4 ヲ ordinary method =
1) $f(x) \in L_p(-\infty, \infty)$ ($1 < p \leq 2$) , Fourier
transform / existence ヲ証明スル。(是レハ新シ
クタイケレド序ニ証明シテオク)

$$\text{今 } F_a(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a f(x) e^{-ixt} dx$$

トオク。 $b > a$ トスル。

$$F_b(t) - F_a(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_a^b + \int_{-b}^{-a} \right) f(x) e^{-ixt} dx$$

$$\text{ハ明ニ } \psi(x) = f(x) \quad a < x < b, \quad -b < x < -a \\ = 0, \quad \text{otherwise}$$

1 Fourier transform テアル。故ニ定理 4 =

1)

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} |F_b(t) - F_a(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \leq A_p \left(\int_a^b |f(x)|^p dx + \int_{-b}^{-a} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$b \rightarrow \infty, a \rightarrow \infty$ トシテ

$$\lim_{a, b \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |F_b(t) - F_a(t)|^q dt = 0$$

故ニ

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |F_a(t) - F(t)|^q dt = 0$$

$+ \infty$ $F(t)$ ($L_q(-\infty, \infty)$) が exist スル. 是レデ $f(x)$
 の Fourier transform $F(t)$ の existence が証
 明サレタ。