OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	Characteristic function ノ non-vanishing
Author(s)	河田, 龍夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1940, 198, p. 214-218
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74793
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

863. Characteristic function / Non-vanishing

河田龍夫 (仙台高工)

1. 東北數學雜誌 46 / part 2 (1940), Non-vanishing of functions and related problems = オイテ

定理1. $\sigma(x)$ が distribution function デアル const a ニ對シ

(1) $$\sigma(-u+a)-\sigma(-u-a)=O\left(\exp\left(-\theta(u)\right)\right), \quad u\to+\infty$$

トスル、コゝニ $\theta(u)$ ハ $u>0$ デ定義サレタ positive increasing function デ

(2) $$\int_1^{\infty}\frac{\theta(u)}{u^2}\,du=\infty$$

トスル、ソウスルト

(3) $$\Lambda(x)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{iux}\,d\sigma(u)$$

ハ如何ナル interval ニ於テモ 0 ニナレナイ。

ヲ証明シマシタ、コノ前ノ談話デ此ノ定理ヲ用ヒテ次ノ定理ヲ得マシタ。

定理2. Xヲーツノ chance variable トシ $\sigma(u)$ ヲソノ distribution function トスル. ソシテアル const. $a(>0)$ ニ對シテ (1) ガ満足サレテオルトスル. 若シ $\theta(a)$ ハ (2) ヲ満足サセルトスル. ソノトキモシ X ガーツノ variable ニヨッテ divisible デアレバソノ結果ハ unique デアル.

2. 定理1ノ條件(2)ハ是以上弛メラレナイコトヲ証明シマス. 即チ

定理3. $\theta(u)$ ガ $u>0$ デ定義サレタ positive increasing function デ

(4) $$\int_{1}^{\infty} \frac{\theta(u)}{u^2}\,du<\infty$$

トスル. ソウスルト任意ノ pos. const. a ニ對シ $\sigma(u)$ ガ(1)ヲ満足サセ、且ツソノ characteristic function $\Lambda(x)$ ガ $(-l, l)$ ノ外デハ0ニナル如キモノガアル (l ハ任意ノ正數)

是ハ次ノ補助定理カラ得ラレマス.

補助定理1. $\theta(u)$ ヲ定理3ニ於ケル函數トシ (4) ガ満足サレテオルトラバーツノ non-null ナ函數 $G(x)$ ガ存

在シテ

$$G(x) = O(\exp(-\theta(x)))$$

デ且ツ

$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} G(x) e^{-iux}\, dx$$

ガ $(-l, l)$ ノ外デ 0 ニナルヿ。

是ハ N. Levinson (On a class of non-vanishing functions, Proc. London Math. Soc. 41 (1936) Lemma 4), A Ingham (A note on Fourier transforms, Journ. London Math. Soc., 9) ニ依テ証明サレマシタ。

補助定理 2. $\psi(x)$ ガ $L_2(-\infty, \infty)$ ノ non-null ナ函数トスル。

$$\varphi(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi}(x)\, \psi(x+u)\, dx$$

ヲ作ルト $\varphi(t)/\varphi(0) = \varphi_1(t)$ ハ一ツノ distribution function ノ characteristic function デアル。

是レハ A. Khintchine ノ定理ノ special case デアリマス。

(Bull. Moscou t. 1)

3. 定理3ノ証明シマス。 $\theta(2u)$ ハ勿論(4)ヲ満足サセル。今、補助定理1ガ $\theta(u)$ ノ代リニ $\theta(2u)$ ヲ考ヘルトシテ $l/2$ ヲ考ヘテソノトキノ $F(u)$ ヲトル。是ハ $|u| > \frac{l}{2}$ デ0トナル。

$$\lambda(t)=\int_{-\infty}^{\infty}F(x)F(x+t)\,dx$$

ト置キ $\lambda(t)/\lambda(0)=\Lambda(t)$ ヲ考ヘルト，是レハ補助定理2ニヨッテーツノ characteristic function デ

$\Lambda(t)=0\ (|t|>l)$

直接計算ニヨッテ容易ニ判ル如ク

$$\sigma(-u+a)-\sigma(-u-a)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\Lambda(x)\frac{\sin ax}{ax}e^{iux}\,dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-l}^{l}\frac{\sin ax}{ax}e^{iux}\,dx\int_{-l/2}^{l/2}F(x+t)F(t)\,dt.$$

$$=\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}F(t)\,dt\int_{-l}^{l}F(x+t)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin ax}{ax}e^{iux}\,dx$$

Fourier transform ニ於ケル Perseval ノ定理カラ

$$=\frac{1}{2a}\int_{-l/2}^{l/2}F(t)\,dt\int_{-a}^{a}G(u-y)e^{-i(u-y)t}\,dy$$

$$=O\left(\int_{-\frac{l}{2}}^{l/2}|F(t)|\,dt\int_{-a}^{a}|G(u-y)|\,dy\right)$$

$$=O\left(\int_{-a}^{a}e^{-\theta(2u-2y)}\,dy\right)$$

$$=O\left(e^{-\theta(2u-2a)}\right)=O\left(e^{-\theta(u)}\right),\quad(u>a)$$

此ノ$\sigma(u)$ガ吾々ノ欲スルモノデアル。

4. 定理2デ條件(4)ガ弛メラレナイコトモ間違ヒナカロウト思ヒマスガ一寸出来マセン、定理3カラスグ出ル

様ニ思ッテヤッテ見タノダガ出来マセンデシタ、御教示ノ程願ヒマス。

尤モ f_1, f_2 ヲ二ツノ characteristic functions デアル interval デ $f_1 = f_2$ デ而モ identically ニハ等シクナイトシ、且ツ一方ノ distribution ノ spectrum ガ bounded above (below) ナル如キ一對ノ f_1, f_2 ガアレバ定理3カラ容易ニ証明出来マス。斯様ナモノガ一寸見當ラナカッタノデ失敗シマシタ。

片一方ノ distribution ノ spectrum ニ関スル條件ガ要求サレナケレバ、コノ外ナモノハ容易ニ作レマス。

例ヘバ Gnedenko (Sur les functions caracteristiques, Bull. Moscow, t. 1).

又、両方ノ distribution ガ共ニ bounded (below) ナラバコノ外ナ f_1, f_2 ハ存在シマセン。