864. bicompact space ノ次元ニ就テ

森田 紀 一(東京文理大)

先頃 A. Weil ノ uniform space ヲ讀ンデ bicompact Hausdorff space ノ次元ガ Kompaktum ノ場合ト同様ニ論ゼラレルコトヲ知リマシタ。最近 bicompact space ノ次元ガ話題ニ上リマシタカラ[1]，ソレヲ述ベテミタイト思ヒマス。

§1. normaler Hausdorffscher Raum Rヲ考ヘル。

Lemma 1. $\mathfrak{G} = \{G_1, \cdots\cdots, G_s\}$ ヲ R ノ有限開被覆族トスルトキ，R カラ $\mathfrak{G}$ ノ Nerv（之ヲ多面体ト考ヘル）ノ中ヘ $\mathfrak{G}$-abbildung ガ存在スル。閉被覆族ニ就テモ同様デアル。

証明： R ガ normaler Raum デアルカラ

$$\mathfrak{F} = \{F_1, \cdots\cdots, F_s\};\quad F_i \subset G_i, \qquad i = 1, \cdots\cdots, s$$

ナル $\mathfrak{G}$ ト ähnlich ナ閉被覆族 $\mathfrak{F}$ ガ存在スル。ソコデ $F_i \cap R - G_i = 0$ ヨリ F_i デハ 1，$R - G_i$ デハ 0，ソノ他デハ $0 \leqq f_i(x) \leqq 1$ ナル R 全体デ定義サレタ連続函数 $f_i(x)$ ガ存在スル。

$$U_i = \mathop{E}_{x}\{x;\ f_i(x) > 0\}\ トオケバ,$$

$$F_i \subset U_i \subset G_i.$$

デアルカラ開被覆族 $\mathfrak{U} = \{U_1, \cdots\cdots, U_s\}$ ハ $\mathfrak{G}$ ト ähnlich デアル。コノ $\mathfrak{U}$ ト $f_i(x)$ トヲ使ッテ Kuratowski 写像ヲ作レバ（$\mathfrak{U}$ ノ Nerv ノ Euklidische Reali-

---

1) N. Vedenissoff, Généralisation de quelques théorémes sur la dimension, Comp. Math. 7.

sation K ニ於テ U_i ニ對應スル頂点ヲ b_i トスレバ R ノ点 x ニハ各頂点 b_i ニ *mass* $f_i(x)$ ヲオイタ時ノ重心ヲ對應サセル）之ガ求ムル $\mathfrak{V}$-*abbildung* デアル．開被覆族 $\mathfrak{F}$ ガ與ヘラレタトキハ，逆ニ開被覆族 $\mathfrak{V}$ ヲ作ッテ同様ニヤレバヨイ。

次ニ R ノ次元ヲ *Pontrjagin* ニ從ッテ次ノ如ク定義スル。

定義 1. 次ノ條件ガ滿足サレルトキ、R ノ次元ハ r デアルト云フ： $\dim R = r$.

(a) 任意ノ R ノ有限開被覆族 $\mathfrak{V}$ ヲトルトキ，$\mathfrak{F} \Subset \mathfrak{V}$ 且ツ $m(\mathfrak{F}) \leqq r+1$ [2] ナル有限開被覆族 $\mathfrak{F}$ ガ存在スル。

(b) $\mathfrak{F} \Subset \mathfrak{V}$ ナル任意ノ有限開被覆族 $\mathfrak{F}$ ヲトレバ，必ズ $m(\mathfrak{F}) > r$ ナル如キ有限開被覆族 $\mathfrak{V}$ ガ存在スル。

然ラバ *Lemma* I ニヨリ N. Vedenissoff ノ定理[3] ハ *kompakter normaler Raum* ニ就テ成立スル．即チ（*parfaitement* ノ假定ハ不必要）

定理 1. *kompakter normaler Raum* R ノ次元ハ、任意ノ有限開被覆族 $\mathfrak{V}$ ニ對シ，常ニ n 次元ノ *Polyeder* ノ中ヘノ（上ヘノ）$\mathfrak{V}$-*abbildung* ガ存在スル如キ整数 n ノ中最小ノモノデアル。

---

2) $\mathfrak{F}$ ノ一ツノ要素ヲトレバ必ズ之レヲ含ム $\mathfrak{V}$ ノ要素ガ少クモ一ツ存在スルトキ $\mathfrak{F} \Subset \mathfrak{V}$ トカク・$m(\mathfrak{F})$ ハ $\mathfrak{F}$ ノ *Ordnung* ヲ示ス.

3) 前出 1) ノ論文 *Théorème* I

§2. Rガ特ニ bikompakter Hausdorffscher Raum ノ場合ヲ考ヘル。

然ラバコノ時ハ A. Weil[4] ニヨレバ R ハ espace uniforme ト考ヘラレル。ソノ structure uniforme ヲ與ヘル $R \times R$ ニ於ケル △ ノ entourage ノ famille ヲ V_α トスル。

定義2. R ノ被覆族 $\mathfrak{F} = \{F_1, \cdots\cdots, F_s\}$ ガ $F_i \times F_i \subset V_\alpha$ $(i = 1, \cdots\cdots, s)$ ヲ満足スルトキ，V_α－被覆族ト云フ。

R カラ R' ヘノ連続寫像 f ガ R' ニ於ケル Bild ノ各点 p ニツキ，$f^{-1}(p) \times f^{-1}(p) \subset V_\alpha$ ヲ満足スルトキ，f ヲ V_α－abbildung ト云フ。

定義3. R ガ次ノ條件ヲ満足スルトキ，$\overline{dim}\, R = r$ トカク。

(a) 任意ノ V_α ヲトルトキ $m(\mathfrak{F}) \leqq r+1$ ナル有限開 V_α－被覆族 $\mathfrak{F}$ ガアル。

(b) 有限開 V_α－被覆族 $\mathfrak{F}$ ヲトレバ必ズ $m(\mathfrak{F}) > r$ ナル如キ V_α ガ存在スル

Lemma 2. $dim\, R = \overline{dim}\, R$ （但シ定義1或ハ3ニ於テ共処ニ述ベラレタル如キ r ガ存在シナイトキハ dim R 或ハ $\overline{dim}$ R ハ ∞ トスル）

証明: $dim\, R = r$ トスルト定義3ノ(a)ガ成立ス

---

4) A Weil, Sur les espaces a structure uniforme

ルコトハPontrjaginト同様[5)]、(b)ヲ云フニハ $\gamma \geqq S$ ナレ有限ノ S ヲトルトキ任意ノ V_αー被覆族ノOrdnungが必ズ S ヨリ大ナル如キ V_α ノ存在ヲ云ヘバヨイ。

ソレニハ定義1(b)ニテイヘル $\mathfrak{V}$ ヲトル。

コノ被覆族 $\mathfrak{V}$ ニ対シテハ, R ノ各点 p ニ $V_\alpha(p)$ ヲ對應サセテ出來ル被覆族 $\{V_\alpha(p)\}$ が $\{V_\alpha(p)\} \Subset \mathfrak{V}$ デアル如キ V_α が存在スル。[6)] コノ V_α が我々ノ目的ニ適スル。

Lemma 2ニヨリ, Kompaktumノ場合ノ ε-Überdeckungノ代リニ V_α-Überdeckung. ε-abbildungノ代リニハ V_α-abbildungヲ使ヘバ。Kompaktumノ場合ノanalogyがキク。例ヘバ R 以外ニbicompact uniform space R' ヲ考ヘ, ソノuniform structureヲ與ヘルfamilyヲ V'_β デ表ハセバ, 次ノ事が成立スル。

Lemma 3. R カラ R' ヘノ V_α-abbildung f が與ヘラレタ時,

$M' \times M' \subset V'_\beta$ ナル限リ $f^{-1}(M') \times f^{-1}(M') \subset V_\alpha$ ナレ如キ V'_β が存在スル。

証明. f ハ $R \times R$ カラ $R' \times R'$ ヘノ連続写像ニ拡張出來ル。[7)]

---

5) L. Pontrjagin, Topological groups.

6) 前出4)ノ書物ノThéorème VI, P. 24.

7) $(p, q) \in R \times R$ ナラバ $f(p, q) = (f(p), f(q)) \in R' \times R'$

然ラバコノ寫像ヲ同ジク f デ表ハセバ f ガ V_α-abbildung ナルコトヨリ

$$f^{-1}(\Delta') \subset V_\alpha$$

處デ $\Delta' = \bigcap V'_\beta = \bigcap \overline{V}'_\beta$ （$\overline{V}'_\beta$ ハ V'_β ノ閉苞）

$$\therefore\ f^{-1}(\Delta') = \bigcap_\beta f^{-1}(\overline{V}'_\beta) \subset V_\alpha$$

而シテ $f^{-1}(\overline{V}'_\beta)$ ハ $R\times R$ ニ於ケル閉集合、V_α ハ $R\times R$ ニ於ケル開集合トミテヨイカラ Bikompaktheit ヨリ既ニ有限個ノ $f^{-1}(\overline{V}'_\beta)$ ノ共通部分ガ V_α ニ含マレル。

$$\bigcap_{i=1,\cdots,n} f^{-1}(\overline{V}'_{\beta_i}) \subset V_\alpha$$

ソコデ $V'_\beta \subset \bigcap_{i=1,\cdots,n} V'_{\beta_i}$ ナル V'_β ヲトレバ，コノ V'_β ハ Lemma 3 ノ條件ヲミタス．従ッテ次ノ定理ガ成立スル。

—— 以上 ——

定理 2. n 次元ノ R ニ對シテハ、次ノ如キ V_α ガ存在スル．即チ V_α-abbildung デハ R カラ，R ヨリ低次元ノ空間ヘウツルコトハ不可能デアル。

更ニ

定理 3. R ノ次元ハ，R ガ n 次元ノ Vollkugel ノ上ヘ wesentlich = abbilden サレ得ル如キ整數 n ノ中最大ノモノデアル。

ガ成立スル。

ソレニハ黄表紙[8] ノ 313 頁ノ始メノ部分ヲ少シ変更スル。即チ定理 2 ニ云フ V_α ヲトリ，R ヲ V_α-abbildung

デ r 次元ノ多面体 P ヘウツシ，コノ寫像カラ定マル Lemma 3ニ云フ V'_β ヲトレバ，今ノ場合 R' ハ kompaktum デアルカラ，V'_β ハ正数 ε デ表示サレル。コノ ε デ P ヲ細分シテユケバヨイ。

$n > r$ ナル n ノトルトキ n 次元ノ Vollkugel ヘノ wesentliche abbildung ノ存在セザルコトヲ云フニハ，R カラゆうくりっど R^n ヘノ連続寫像 f ニ對シテ，$\varepsilon > 0$ ト V_α トヲ任意ニ與ヘテ

$$\rho[f(x), g(x)] < \varepsilon, \qquad x \in R$$

ガ成立スル如キ R カラ R^n ヘノ V_α-abbildung g ノ存在ヲ云ヘバヨイ。

トコロデ前表紙 367 頁ノ δ ノ役目ヲスル V_α ノ存在ハ知ラレテヰルカラ、Lemma 1 ヲ利用シテソコノ証明ガソノママ適用出来ル。

更ニ又 Menger-Nobelingscher Einbettungssatz ニ analogous ニ

定理4. $\dim R = r$ ナラバ，可附番個ノ V_{α_i} ($i = 1, \cdots\cdots, n, \cdots\cdots$) ヲ與ヘタトキ，スベテノ V_{α_i} ニ対シテ同時ニ V_{α_i}-abbildung トナル如キ R カラ R^{2r+1} ヘノ連続寫像 f ガアル。

ガ成立スル。(勿論 Einbettungssatz ノソノママノ成立ハ望ミ得ナイ。例ヘバ 0-次元ノ bicompact space ノ任意濃度ノ個数ノ topological product ハ又 0-次元

前頁脚註 8) Alexandroff-Hopf, Topologie I.

デアルカラ）

§3. 次ニ ε-Kette ノ代リニ V_α-Kette ヲ考ヘルコトガ出来ル。即チ $a_1, \cdots\cdots, a_s$ ガ $(a_i, a_{i+1}) \subset V_\alpha$ ヲ満足スルトキ之ヲ V_α-Kette ト称スル。

然ラバ一点 p ノ V_α-Komponent $K_\alpha(p)$ モ 0-Komponent $K_0(p)$ ［或ハ Δ-Komponent トイフベキカモ知レマセン］モ同様ニ定義サレル。

R ハ勿論 bikompakter Raum トスル．然ラバ部分閉集合 F_1, F_2 ガ共通点ヲモタネバ $V_\alpha(F_1) \cap F_2 = 0$ ナル V_α ガ存在スル．之ハ Kompaktum ノ場合ノ $\rho(F_1, F_2) = \sigma > 0$ ニ相当スル，従ッテ p ノ Komponent ヲ $K(p)$ トオク時

$$K(p) = K_0(p) = \bigcap_\alpha K_\alpha(p)$$

ガ同様ニ現在ノ場合ニ成立スル。

今一点 p ヲ含ム開集合ガ同時ニ閉集合ナル T ヲトルト必ズ $K(p) \subset T$.

従ッテ $K_\alpha(p)$ ガ同時ニ開且ツ閉ナル集合トル故

定理5. bikompakter Hausdorffscher Raum ノ一点 p ノ Komponent ハ，p ヲ含ミ且ツ同時ニ開且ツ閉ナル集合スベテノ共通部分デアル。

又，

定理6. R ガ 0.次元ナルコトト totally disconnected ナルコトトハ同値デアル。但シ R ハ

bikompakt.