



Title	モデュラー体ノ二次ノ Full linear群ノテンソル表現
Author(s)	中山, 正
Citation	全国紙上数学談話会. 1940, 198, p. 226-235
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74795
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

865. モデュラー 体 / 二次 / *Full linear* 群 / テンソル 表現

中山 正 (阪大)

1. ハジメ = 標数 0 / 時ヲ一寸復習:

標数 0 / 体 / 上 / *Full linear* 群 / テンソル 表現
ノ / 既約成分等々ハヨク知ラレテアル。スナハチ既約成分
トイハユル *diagram* ト / 間ニ對應ガアリ云々……デ
アル。

シケモ二次 / *Full linear* 群 / 場合ハ特ニ簡單デ
アル。ソレハ結局一行又ハ二行 / *diagram* / ミ考ヘ
レバヨイノデアリ、モシ *determinant* ガ因子ニナツテ
來ル / ラ度外視スレバ二行 / 場合ハ始メ / 若干 / 列ヲトリ /
ゾイテ良イコトニナリ *essentially* = ハ一行 / *diagram*
ニ對應スルモノ、即チ單ニニツノ変數 x, y / アル次数 / 齊
次式 / ナス、表現加群デ出來ル表現 / ミデ事足リルコトニナ
ル。

シタガツテニツノ / ソノヤウナ表現 / くらねっかー 積 /
展開モ簡單デアル。コレヲ / コトヲキレイナ形ニ書キ表ハシ
タ / ガ結局所謂 Clebsch-gordan / Expansion

デアル (Weyl, 群論ト量子力学 = 群論シテアツタト記憶シマス)。スナハチ x, y フ

$$(x, y) \longrightarrow (x, y) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ナル変数トスル。シカルトキ r 次齊次式ノトス加群

$$\{x^r, x^{r-1}y, \dots, xy^{r-1}, y^r\}$$

デ定義サレタ表現ヲ Δ_r トカツ。シカラバイカナル $r = \psi$ イテモコレハ既約, 更ニコレニ行列式 $D = ad - bc$ ノ中ヲカケタモノ D^s , Δ_r ニ既約。シカシテイカナル テンソル表現 ニカナル既約成分 = 完全分解サレル。

然モ

$$\Delta_r \times \Delta_t = \begin{pmatrix} \Delta_{r+t} & & & 0 \\ & D \cdot \Delta_{r+t-2} & & \\ & \cdot & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & D^{\frac{r+t-|r-t|}{2}} \cdot \Delta_{|r-t|} & \end{pmatrix}$$

2. サテ次 = 標数 p ($\neq 0$) ノ場合ノ Full linear 群ノ表現トナルト、ドウモ五里霧中デアリマス。(勿論 p 次ヨリヒクイ次数ノ テンソル表現 ノミ考ヘレバ、標数 0 ノトコロト全ク parallel デアルナドトイフ注意ハ餘リニモ trivial デアル)。實際若シコレガ解レバ随分良イワケデセウガ!

コノ場合ニツノ行キ方が考ヘラレルノデハナイカト思フ。即チーツハ有限体トシテ有限群ト考ヘ、ソノもがゆら一表現ト考ヘルコト、次ニハソウデナク何ヲカ標数 0 ノトキヲ

modify (勿論一寸位ノ modification デハ駄目デセウガ) シタリシテ見ル事。

然シ、イヅレニシテモ一般論ハナカナカ手ガツキソウニ
ナイ。ソレデハ低次、二次トカ 三次トカノ場合ハ? 現ニ
R. Brauer ノ所ノ弟子ガコノ場合ノヲマツテキルト聞
イテ居コス、行キ方ハ第一ノ方、スナハチ有限群的ヲリ方ヲ
セイデス。

コノデハ、二次 (binary) ノ場合ダケヲ考ヘ、ユノ
場合ニハ標数 0 ノ場合、スナハチ Clebsch-Gordan
展開デ云ヒ表ハサレテキル現論ヲルシ modify スルコト
ニヨツテ解決サレルコトヲ示シタイト思ヒマス。二次ノ場合
ハ全ク旨ク行クノデス。實ハ 旨ク行キスヤル ノデス。然シ
ソノ modification ト云フノハ勿論 essentially
ニ標数 p ガキイテ来ルソレデアリマスシ、トモカク Clebsch-
Gordan ト名前マデツイタ定理デスカラ、ソレガ標数 p
デドウナルカヲ見ルノモ一興ト思ヒマス。マタ幾分デモ一般
論ヘノ示唆が見出サレルナラ幸甚デス。(實ハ 旨ク行キスヤテ
キルノデ却ツテソノ爲ニハコマルノデス)。

3. 簡單ノタメ標数 p ノ素体ヲ代数的ニ閉テタ体デ考
ヘルコトニシマス。ハジメニ若干ノ既約表現ヲツクリマス。

先ヅ、 $\gamma = 0, 1, 2, \dots, p-1$ ニ對シテハ

$$\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{p-1}$$

上ト同ジニツクレバ既約、シカモ $p-1$ 或ヒハソレヨリ低
イ次數ノ テンソル 表現ハ完全可約デ、コレヲノ既約表現ニ適

當ニ $D = ad - bc$ ノ中ヲカケタモノニ合レルコトハ明カ。

(コノマデハ高々 $(p-1)!$ ヲ考ヘレバヨイノデ標數 p ハキイテ來マセン。

更ニ、アル數ヲソノ p^i 乘ニウツスノハ我々ノ體ノ

Automorphism デアリマス。コレガアル表現 Δ カラ得ヲレル表現ヲ

$$\Delta^{(i)}$$

デアラハス事ニスル。

ソコデ、今任意ノ自然數 m が與ヘラレタトキ、次ノ如クシテ m 次ノ表現ヲツクル。

$$m = t_0 + t_1 p + t_2 p^2 + \dots + t_s p^s$$

($0 \leq t_i \leq p-1$) トシ

$$\Gamma_m = \Delta_{t_0} \times \Delta_{t_1}^{(1)} \times \Delta_{t_2}^{(2)} \times \dots \times \Delta_{t_s}^{(s)}$$

トオリ、積ハくろねーかー、(シタガッテ $m \leq p-1$ ナラ $\Gamma_m = \Delta_m$)、コレガ齊 m 次ノテンソル表現ノ事ハ明。

定理 Γ_m ハ既約デアル。

ホトンド明デアルガ、トモカリ m ヨリ低イトコロデハ定理ガ成立ツト假定スル、表現 Γ_m ノ行ノ數ヲ g トシタトキ、ソノ g^2 個ノ元(ソレヲハミナ

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ノ a, b, c, d 、 m 次ノ齊次式ガ)ガ一次独立ノコトヲ云ヘバヨイ。(Burnside)。ソノタメ Γ_m ノ最後ノ因子

$\Delta_{t_s}^{(s)}$ 1元ヲ考ヘルニ、ソレハミチ a, b, c, d 1齊 t_s 次式ノ p^s 乗、スナハチ $a^{p^s}, b^{p^s}, c^{p^s}, d^{p^s}$ ノ齊 t_s 次式デアール、ソレヲ今

$$f_{\mu\nu}(a^{p^s}, b^{p^s}, c^{p^s}, d^{p^s}); \mu, \nu = 0, \dots, t_s$$

トスル。シカルニ他方 他ノ部分

$$\Delta_{t_0} \times \dots \times \Delta_{t_{s-1}}^{(s-1)}$$

1元ヲ考ヘルト、ソレハ a, b, c, d 1 $t_0 + \dots + p^{s-1} t_{s-1}$ ($< p^s$) 次ノ齊次式デアール。ソレヲ $g_{\rho\sigma}(a, b, c, d)$ トレヨウ。シカラバ Γ_m 自身ノ元

$$f_{\mu\nu} g_{\rho\sigma}$$

デアール。若シコレヲノ間ニ一次關係ガアレバ次數ヲ考ヘルコトニヨツテ各 $f_{\mu\nu}$ ノ係數ナル所ノ $g_{\rho\sigma}$ 1 linear combination がミナ 0 デナケレバナラズ。シカルニ吾々ノ假定デソレハソノ係數ガミナ 0 ノトキノミデアール。

ヨツテ Γ_m ハ既約。

實ハコウシタ Γ_m ダケデ足リルノデアール。

4. ソノタメニ、以上デハ $\Delta_1, \dots, \Delta_{p-1}$ マデヲ考ヘタガ、 Δ_p ハドンナデアラウカラ見ル。ソノ表現加群ハ $m = \{x^p, x^{p-1}y, \dots, xy^{p-1}, y^p\}$ デアール、ヨツテ直チニ

$$m = \{x^p, y^p\}$$

+1 認容部分群ヲ持ッテキルコトガワカル。ソレデハ $n/m + 1$
 ル剰餘群ノ構造ハ? ソレハ既約デアル。何トトラバ、ソ
 ノ表現=出テ來ル $(p-1)^2$ 個ノ元ハ $a^\mu c^\nu b^p d^{\tau} (\mu + \nu$
 $+ p + \tau = p; \mu + p; \nu + \tau, \text{ドレモ } p \text{ デ+イ})$ ノ一次
 結合デアルガ、ソノ一ツ即チ上記ノ項ハ

$$(ax + by)^{\mu+p} (cx + dy)^{\nu+\tau}$$

ノ中ノ $x^{\mu+\nu} y^{p+\tau}$ ノ係數トシテ實際=出テ來 (コノデ
 掛ッテキル常數ハ 0 デ+イ) シカモソコニダケ出テ來ルノデ
 アル。

ヨッテ $(p-1)^2$ 個ノ有式ガ一次独立。

サテ、コノマデハ万事何モ *binary* デ+クトモ良イノデア
 ッタ、所ガ *binary* デ+イト、コノ既約 + $n/m = 0$
 ル表現ノ解釈=ワルシムノデアル!! 然ル= *binary*
 ガトコノ表現カラ旨ク $D = ad - bc$ ガク>リ出セル、ス
 +ハチ $a=b, c=d$ トオケバ $(ax + by)^i (cx + dy)^{p-i}$
 ハ單 = $(ax + by)^p = a^p x^p + b^p y^p$ ト+ッテ m ノ中 =
 フクミレル。ヨッテ D ガ n/m ノ表現カラク>リ出セテ、残
 ルハ $p-2$ 次有次表現!! シカモソレガ Δ_{p-2} ナルコト
 ハ見易イ。他方 m デノ表現ハ $\Delta_1^{(1)} = \text{他} + \text{ラヌ}$ 、ス+ハ
 チ。

$$\Delta_p = \begin{pmatrix} D \cdot \Delta_{p-2} & 0 \\ * & \Delta_1^{(1)} \end{pmatrix}$$

5. 次 $\Delta_r \times \Delta_t$, コレニツイテハ標数 0 ノトキ
ト全然同ジ論法デ同ジ形ノ分解ガ証明サレル、タジシ左下
部ノ 0 フタオキカヘナケレバトラヌ、(完全分解デナイ)、
シカモ分解ノ成分 $D \cdots \Delta \cdots$ ガ既約デナイ所ガ本質的ニ
コトナルヲケデアル、兎ニ角

$$\Delta_r \times \Delta_t = \begin{pmatrix} \Delta_{r+t} & & 0 \\ & D \cdot \Delta_{r+t-2} & \\ * & & \ddots \end{pmatrix}$$

証明ノやり方ハ先ヅ

$$\Delta_r \times \Delta_t = \begin{pmatrix} \Delta_{r+t} & 0 \\ * & D \cdot \Delta_{r-1} \times \Delta_{t-1} \end{pmatrix}$$

ヲイヘバヨイ。ソレニハ Δ_r, Δ_t ノ表現加群トシテ

$$\begin{aligned} & \{x^r, x^{r-1}y, \dots, y^r\}, \\ & \{z^t, z^{t-1}\eta, \dots, \eta^t\} \end{aligned}$$

ヲトリ、ソノ直積ニオイテ、 $x = z, y = \eta$ トオイタトキ 0
ニナル元ノナス部分群ヲ考ヘルト、ソレガ $D \cdot \Delta_{r-1} \times \Delta_{t-1}$
ヲ與ヘ、他方剩餘群ガ Δ_{r+t} ヲ與ヘルノデアル。

6. コノ § 4, 5 フツカヘバ結局

定理 イカナルテンソル表現モ § 3 デ與ヘタ既約表
現 $D^* \cdot \Gamma_m$ ニ分解 (完全分解デハナイ) サレル。

コトガ容易ニワカル。スナハチ

$$\Gamma_m = \Delta_1 \times \cdots \times \Delta_1 \quad (m \text{ 個})$$

ハ $\Gamma_m, \Gamma_{m-2} \cdot D, \Gamma_{m-4} \cdot D^2, \dots$ ヲ成分トスル (各々

可図カヲラハレル)

今定理がルマデハ成立ツトスル。シカシテ T_{m+1} ヲ考
ヘル。然ラバ結局 $\Delta_1 \times \Gamma_m, \Delta_1 \times \Gamma_{m-2} \cdot D, \dots$ ヲ考
レバヨイ。然シ=各自以下ハ結局低イ所 = reduce カレル
カラ、 $\Delta_1 \times \Gamma_m$ ヲ考ヘレバヨイ。

ソノタメ再ビ

$$m = t_0 + t_1 p + \dots + t_s p^s \quad (0 \leq t_i \leq p-1)$$

トスル。

1) $t_0 + 1 \leq p-1$. シカラバ $t_0 \geq 1$ ナハ $t_0 = 0$
ニ終ヒ

$$\Delta_1 \times \Delta_{t_0} = \begin{pmatrix} \Delta_{t_0+1} & 0 \\ * & \Delta_{t_0-1} \cdot D \end{pmatrix} \quad \text{又ハ } \Delta_1$$

ヨツテ、 Γ_m ノ定義ヲ想起スレバ容易ニ

$$\Delta_1 \times \Gamma_m = \begin{pmatrix} \Gamma_{m+1} & 0 \\ * & \Gamma_{m-1} \cdot D \end{pmatrix} \quad \text{又ハ } \Gamma_{m+1}$$

故ニヨロシイ。

2) $t_0 + 1 = p$

$$\begin{aligned} \Delta_1 \times \Delta_{t_0} &= \Delta_1 \times \Delta_{p-1} = \begin{pmatrix} \Delta_p & 0 \\ * & \Delta_{p-2} \cdot D \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} D \cdot \Delta_{p-2} & 0 \\ * & \Delta_{p-2}^{(1)} \cdot D \cdot \Delta_{p-2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ヨツテ

$$\Delta_1 \times \Gamma_m = \begin{pmatrix} \Gamma_{m-1} \cdot D & 0 \\ * & \Delta_{t_s}^{(s)} \times \dots \times \Delta_{t_1}^{(1)} \times \Delta_1^{(1)} \cdot \Gamma_{m-1} \cdot D \end{pmatrix}$$

シカルニ

$$\Delta_{t_s}^{(s)} \times \cdots \times \Delta_{t_1}^{(1)} \times \Delta_1^{(1)} \\ = \left(\Delta_{t_s}^{(s-1)} \times \cdots \times \Delta_{t_1}^{(0)} \times \Delta_1^{(0)} \right)^{(1)}$$

テ且ツ

$$\Delta_{t_1}^{(0)} \times \Delta_1^{(0)} = \Delta_{t_1} \times \Delta_1 = \begin{pmatrix} \Delta_{t_1+1} & 0 \\ * & \Delta_{t_1-1} \cdot D \end{pmatrix} \text{又ハ} \Delta_1$$

($t_1 \geq 1$ 或 $t_1 = 0$ = 從ツテ). ヨツテモシ $t_1 + 1 \leq p-1$

ナラ

$$\Delta_{t_s}^{(s)} \times \cdots \times \Delta_{t_1}^{(1)} \times \Delta_1^{(1)} = \begin{pmatrix} \Gamma_{m+1} & 0 \\ * & \Gamma_{m-2p+1} \cdot D^p \end{pmatrix} \\ \text{又ハ } \Gamma_{m+1}$$

トナツテヨイ。モシコソデ $t_1 + 1 = p$ ナラ同ジヤウナ
reductionヲ繰リ返セバヨイ。

結局定理が証明サレル。(コノ辺綱イ計算が或ヒハ一寸
位間違ツテキルカモ知レマセンが、要スルニ大体ヨイト思ヒ
マス)。ナホ T_m / 中ニ上記ノ成分ガ何回アルカ。又、ドン
ナ順序デアルカ (少クトモアラハレルソノ一ツノ順序) 等モ
上ノ計算カラシラベテ見レバワカル筈デスガ、面倒デスカラ
マナセウ。更ニ $\Delta_r \times \Delta_t$ 又ハ $\Gamma_m \times \Gamma_n$ / 既約成分ノ分
解、(Clebsh-Gordanノ定理ノ代用トシテ)ヲシラ
ベルコトニ容易デアルワケデス。

7. 上ニオイテ、分解ハイツモ完全トハカギラヌカラ*
ヲカイテオキマシタ。レカシ、實際ニ*デアツテ必ズシモ0

デナイデセウカ？ 答ハ肯定的。タトヘバ、標数2トシ
タトキ

$$\Delta_1 \times \Delta_1$$

ガスデ=完全可約デナイ。ソレヲ見ル=ハ標数2ノ素体ノ
Full linear 群ト考ヘテヨイ。ソレハ6個ノ元

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

ヨリタル。今コレノくろねっかー自乗

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \dots$$

ヲツクリ、ソレヲ全部加ヘ合セルト

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ナル行列、トモカク $\neq 0$ デアル。シカル=6個ノ元ヲ全
部加ヘタモノハ、タシカ=コノ有限群ノ群環ノ radical
=フクマレル。(標数2)。ヨツテコノくろねっかー自乗
ハ完全可約デナイ。即チ一般ニニツノ完全可約ノ表現ノくろ
ねっかー積必ズシモ完全可約デナイ。最近モ正田先生ト話シ
タノデスガ、くろねっかー積トイフモノハ甚ダ便利ト代リマタ
正体ノワカラナイモノデアリマス。ナホ、更ニヒネクレテ、
完全可約デナイ表現ノくろねっかー積が完全可約デアルコト
トドアルガラウカ？