



Title	確率法則ノ分解ニ就テ
Author(s)	河田, 龍夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1940, 198, p. 236-240
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74796
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

866. 確率法則 / 分解 = 就テ

河 田 龍 夫 (仙台商工)

第 197 号デ同題 / 下=次 / 定理ヲ証明シマシタ。

定理 1. *chance var.* X / *distribution function* $\sigma(u)$ トスル。若シアル'常数 $a (a > 0) =$ 對レテ $u \rightarrow +\infty$ ノトキ

$$(1) \quad \sigma(-u+a) - \sigma(-u-a) = O(e^{-\theta(u)})$$

デア'ルトスル。コゝ $= \theta(u)$ ハ $u > 0$ デ定義サレタ正増加函数デ

$$(2) \quad \int_1^{\infty} \frac{\theta(u)}{u^2} du = \infty$$

トスル。ソウ'スルト X / 一ツ / *chance variable* = ヨリ *division* ハ *unique* デアル。

コノ定理デ (2) / 條件ハ是以上弛メルコトハ不可能デア'ロウト述ベテオキマシタ。

サテ前号デ *characteristic function* / *non-vanishing* トイ'表題 / 下=次 / 定理ヲ証明シマシタ。

定理 2. $\theta(u)$ $\gamma u > 0$ デ定義サレタ正増加函数デ

$$(3) \quad \int_1^{\infty} \frac{\theta(u)}{u^2} du < \infty$$

トスル。ソウ'スルト *distribution* $\sigma(u)$ が (1) γ 満足サセ (任意 / $a =$ 對シテ) 且ツソノ *characteristic function* $\Lambda(t)$ が $(-l, l)$ / 外デ $0 =$ ナル如キ $\sigma(u)$

が存在スル。

$\varepsilon = \varepsilon$ 任意ノ正数。

ソノ時、 ε ノ定理カラ定理 1ノ (2)ガ弛メラレナイコトヲ証明スル方針ダッタノガ失敗シタト申シマシタ。

併シ定理 2ノ証明カラ容易ニ (2)ノ弛メラレナイコトガ証明出来マス。コレヲ注意スルノガ本談話ノ目的ナリマス、即チ次ノ結果ガ得ラレマス。

定理 3. $\theta(u)$ ヲ定理 2ニ於ケル函数トスル。ソウスルト一ツノ chance variable X ガ存在シテソノ distribution ヲ $\sigma(u)$ トスルト是ガ (1)ヲ満足サセ、而シテ $X = X_1 + X_2 = X_1 + X_3$ ガ成立スル。

$\varepsilon = P_r(X_2 \neq X_3) > 0$ 。(即チ $X, X_1 = \varepsilon$ リ division ハ unique ナリ)。

定理 2ノ証明ニヨレバ ($\varepsilon = \frac{\pi}{2}$ トスル) $|u| > \frac{\pi}{2}$ ナリ
 $0 =$ ナル適當ナリ $F(u)$ ヲトリ

$$\Lambda(t) = \lambda(t)/\lambda(0), \quad \lambda(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) F(x+t) dx$$

トスレバ $\Lambda(t) = 0$, $|t| > \pi$ トナリ之レハ一ツノ distribution $\sigma(u)$ ノ characteristic function トナル。且ツ $\sigma(u)$ ハ (1)ヲ満足サセル。($\theta(u)$ ハ定理 3ノ文句中ノ $\theta(u)$)。

$$\text{ナリ} \quad \lambda(t) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F(x) F(x+t) dx$$

トナル。 $M(t) = \Lambda(t) \quad (|t| \leq \pi)$

トシ且ツソノ他デハ 2π 期 period トスル periodic function トスル。

$M(t)$ が連続ナルコトハ容易ニ verify 出来ル。

($\because \Lambda(\pi) = \Lambda(-\pi) = 0$)

サテ $M(t)$ の Fourier series を作ルソノ Fourier coeff. は

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} M(t) e^{-int} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} dt \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F(x) F(x+t) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F(x) e^{inx} dx \int_{-\pi}^{\pi} F(x+t) e^{-i(x+t)n} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F(x) e^{inx} dx \int_{-\pi+x}^{\pi+x} F(t) e^{-int} dt \end{aligned}$$

然ルニ $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, 故ニ $\pi+x \geq \frac{\pi}{2}$, $-\pi+x \leq -\frac{\pi}{2}$

$F(t) = 0$ ($t > \frac{\pi}{2}$). 随テ

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} F(x) e^{inx} dx \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F(t) e^{-int} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F(x) e^{inx} dx \right|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

即チ $M(t)$ の Fourier coeff. は non-negative ナル。

而モ明カニ $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n < \infty$. 故ニ

$$M(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{int} \quad a_n \geq 0$$

トトリ $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n = M(0) = 1$ デアル。故 = $M(t)$ の n 7

spectrum トシ、ソノ急 = オケル jump が a_n デアル
 $\neq$ distribution, characteristic function
 デアル。又 $M(t)$ が $\Lambda(t) =$ identically equal デ
 タイコトハ定義カラ勿論ノコトデアル。サテ

$$\Lambda^2(t) = \Lambda(t) M(t)$$

デアルカラ $\Lambda(t), M(t)$ 7 characteristic function
 トスル chance variables 7 夫々 X_1, X_2 トシ
 $X_1 + X_1 = X$ トスレバ (X_1, X_1 は indep. トス)

$$X = X_1 + X_1 = X_1 + X_2. \quad (P_Y(X_1 \neq X_2) > 0).$$

トトリ、 X の distribution 7 $\tau(u)$ トスレバ

$$\tau(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(u-t) d\sigma_1(t)$$

($\sigma_1(t)$ は $M(t)$ の distribution)

$$\begin{aligned} \tau(-u+a) - \tau(-u-a) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (\sigma(-u-n+a) - \sigma(-u-n-a)) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-[\frac{u}{2}+1]} + \sum_{n=-[\frac{u}{2}+1]+1}^{\infty} \end{aligned}$$

サテ $0 < a < 1$ ト假定スルコトが出来ル、ソノスルト

$$\sum_{-\infty}^{\infty} (\sigma(-u-n+a) - \sigma(-u-n-a)) \leq 1$$

が、 Γ の作成から $a_n = O(e^{-2\theta(|n|)})$

故に容易に

$$\tau(-u+a) - \tau(-u-a) = O(e^{-\theta(\frac{u}{2})}).$$

が得られる。

始めから θ として $\theta(2u)$ をとってあげば τ は (1) を満足させる。

是で吾々の目的が完全に達せられた。