



Title	Idealtheorieニ就イテ
Author(s)	松下, 嘉米男
Citation	全国紙上数学談話会. 1940, 199, p. 241-251
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74797
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

867. Idealtheorie = 就イテ

松下 嘉米男 (東大學生)

Integritätsbereich = 於テ Ideal = 關スル
Teilerkettensatz が eingeschränkter Vielfachenkettensatz ヨリ出ルコトハ森、秋月氏等ノ研究
= ヨリ既ニ知ラレヲキル。又 C. Hopkins が (einsteiniges
bleald = 對スル) Minimalbedingung ヲ有ル
(nicht kommutativer) Ring = 於テハ Radikal
が nilpotent ナルコトヲ証シ、之ヲ用ヒテ淺野
氏ハ nicht kommutativer Ring = 於テ簡單 =
Linksideale = 對スル Teilerkettensatz ヲ
Vielfachenkettensatz ヨリ出シタ。之レヨリ直チニ
kommutative ナル場合 = 於テハ Teilerkettensatz
が eingeschränkter Vielfachenkettensatz
ヨリ出ルコトがワカル。

サテ普通 Integritätsbereich = 於ケル bleal-
theorie ハハ次ノ ミツノ條件ノ下ニ論ゼラレル。

1. bleale = 對スル Teilerkettensatz が
成立スル。
2. Primideal ハ teilerlos ナリ。
3. Quotientkörper = 於テ ganz abgesch-
lossen ナリ。

然ルニ 1, 2 ハ eingeschränkter vielfachen

kettersatz より出ル以上 1. 2. 代り = eingeschränkter Vielfachenkettersatz ヲ以テシテモ Idealtheorie の同様 = 論ジラレルヲケダアル
 ソコデ eingeschränkter Vielfachenkettersatz より一様 Teilerkettersatz ヲ出スコトヲセズ直接 = Idealtheorie ヲ論ジル問題ガアル。コレヲ次ノ様ニマツテ見マシタ。

3. 次ノ條件ヲ有スル Integritätsbereich トス。

I. bleal = 対スル eingeschränkter Vielfachenkettersatz が成立スル。

II Quotientenkörper = 於テ ganz abgeschlossen ナリ。

ソウスルト $\mathfrak{y}$ = 於ケル Ideal の Primidealzerlegung が出来且ツ、Primideal ノ順序ヲ問題ニシナケレバ Zerlegung は eindeutig ナリ。

之ヲ順ヲ追ツテ証明シマス。尚 Einheitsideal Nullideal の Primideal ノ中ニ入レナイデオク。

先ツ $\mathfrak{y}$ の II = より Element ヲ含ミ、 $I =$ より $\mathfrak{y}$ の bleal の prim ナルトキニ限り teilerlos ナリ。以下一般ノ bleal ヲ $\pi, \rho, \dots$, Primideal ヲ $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}', \dots$ ト記ス。

定理 1. $\mathfrak{y} =$ 於テ π ヲ含ム Primideal ト $\bar{\mathfrak{y}} = \mathfrak{y}/\pi =$ 於ケル Primideal ハ $1:1$ = 對應スル。又

$y \sim \bar{y} =$ 於て y の $\mathcal{O}$ を含み $\neq$ 1 Primideal の $\bar{y}$
 $=$ 對應し、逆 $= \bar{y} =$ 對應スル y の Primideal の $\mathcal{O}$
 を含み $\neq$ 1。但し $\mathcal{O} = \mathcal{O}$ の prim ではないト
 スル。

証明. $y \sim \bar{y} = y/\mathcal{O} =$ 於て $\mathcal{P}$ を y の Primideal ,
 $\mathcal{P} \rightarrow \bar{\mathcal{P}}$ トスル $\mathcal{P} \subset \mathcal{O}$ かつ $y \subset \mathcal{P} = (\mathcal{P}, \mathcal{O})$ デ
 $\bar{\mathcal{P}} \subset \bar{\mathcal{O}}$ トナリ、又 $\bar{\mathcal{P}}$ が $\bar{y}$ デ Primideal かつ $\mathcal{O}$ の開カ
 ナリ。

$\mathcal{P}' \subset \mathcal{O}$, $\mathcal{P} \neq \mathcal{P}'$ トスル $y = (\mathcal{P}, \mathcal{P}')$ トナリ $\bar{y} = (\bar{\mathcal{P}}, \bar{\mathcal{P}}')$
 トナリ。

従って $\bar{\mathcal{P}} \neq \bar{\mathcal{P}}'$ ナリ。

次 $= \bar{\mathcal{P}}$ を $\bar{y}$ の Primideal トし、 $\mathcal{P}$ を $y \sim \bar{y} =$ 於て
 $\mathcal{P} \rightarrow \bar{\mathcal{P}} \in \bar{\mathcal{P}}$ ナル y の $\text{Element } \mathcal{P}$ の全体トスル $1 \rightarrow$
 $1 \notin \bar{\mathcal{P}}$ ナル故 $1 \notin \mathcal{P}$ 、従って $y \subset \mathcal{P}$ ナリ。

ソコデ $\mathcal{P}$ が y の Primideal かつ $\mathcal{O}$ の開カナ
 リ。

従って $\mathcal{O}$ を含み y の Primideal ト $\bar{y} = y/\mathcal{O}$
 の Primideal ト $1:1 =$ 對應スル。

$\mathcal{P} \subset \mathcal{O}$ トスル $y = (\mathcal{P}, \mathcal{O})$ トナリ $\bar{y} = (\bar{\mathcal{P}}, \bar{\mathcal{O}})$
 $= (\bar{\mathcal{P}}, \bar{0}) = \bar{\mathcal{P}}$ ナリ。 $\mathcal{O} = \bar{0}$ の $\bar{y}$ の Null トス。逆
 $\bar{\mathcal{P}} = \bar{y}$ トスル $y = (\mathcal{P}, \mathcal{O})$ トナリ $\mathcal{P} \subset \mathcal{O}$ ナリ。故
 $y \sim \bar{y} =$ 於て $\mathcal{O}$ を含み $\neq$ 1 Primideal の $\bar{y} =$ 對應
 し $\bar{y} =$ 對應スル y の Primideal の $\mathcal{O}$ を含み $\neq$ 1。

—— 証明終り ——

$\mathcal{R} = \mathcal{R}$ 7 Ring θ 1 Radical トシ, $\mathcal{P} \neq \theta$
 1 Primideal トスル ト $\mathcal{P} \subset \mathcal{R} + 1$ 。何故ナラバ
 $a \in \mathcal{R}$ トスル ト $a^p = 0$, p ハ アル 自然数。 $\theta \sim \theta/\mathcal{P} = \bar{\theta}$
 = 於テ $a \rightarrow \bar{a}$ トスル ト $\bar{a}^p = \bar{0}$, $\bar{\theta}$ ハ Integritäts-
 bereich ナル 故 =, $\bar{a} = \bar{0}$ ナリ。即チ $a \in \mathcal{P}$, 従ッテ
 $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P} + 1$ 。

ヲコデ $\mathcal{R}/\mathcal{P}$ 7 $\mathcal{P}$ 1 Prim デ ナイ bleal トシ $\bar{\mathcal{Y}} = \mathcal{Y}/\mathcal{P}$
 1 Radical 7 $\bar{\mathcal{V}}$ トスル ト $\mathcal{Y}/\bar{\mathcal{V}}$ ハ $\mathbb{I} = \mathbb{I}$ 7 Ideal
 = 対スル Minimalbedingung 7 有スルモ halbein-
 facher Ring ナリ。従ッテ $\mathcal{Y}/\bar{\mathcal{V}}$ ハ 有限個, minimales
 Ideal, 直和 = ナル。

$$\bar{\mathcal{Y}} = \mathcal{Y}/\bar{\mathcal{V}} = \bar{\mathcal{L}}_1 + \bar{\mathcal{L}}_2 + \dots + \bar{\mathcal{L}}_r,$$

$\bar{\mathcal{L}}_i$: minimales Ideal.

ヲウ スル ト $\bar{\mathcal{P}}_i = \bar{\mathcal{L}}_1 + \dots + \bar{\mathcal{L}}_{i-1} + \bar{\mathcal{L}}_{i+1} + \dots + \bar{\mathcal{L}}_r$,
 $i = 1, 2, \dots, r$, r 個ハ teilerloses bleal ナ
 リ。即チ $\bar{\mathcal{P}}_i$ ハ $\bar{\mathcal{Y}}$ 1 Primideal ナリ。尚コノ外 = $\bar{\mathcal{Y}}$ 1
 Primideal, ナイコトハ明ラカ ナリ。依ッテ $\bar{\mathcal{Y}} =$ 於ケル
 Primideal ハ r 個アツテ之レ以上ハナイ。従ッテ前定
 理 = ヲリ $\bar{\mathcal{Y}} =$ 於テ $\mathcal{R}$ 7 含ム Primideal ハ 丁度 r 個
 存在スル。所ガ $\mathcal{R}$ ハ $\bar{\mathcal{Y}}$ 1 Radical ナル 故 $\bar{\mathcal{Y}}$ 1
 Primideal ハ スベテ $\bar{\mathcal{V}}$ 7 含ム。故 = $\bar{\mathcal{Y}} =$ 於ケル Prim-
 ideal ハ 丁度 r 個ガ 存在スル。之レヲ $\mathcal{Y} =$ 於テ $\mathcal{R}$
 へル ト

定理 2. $\mathcal{Y} =$ 於テ 任意 1 Ideal 7 含ム Primideal

ハ常ニ存在シ且ツノ数ハ有限ナリ。

尚コノ Ideal が Primideal ナル時ニモ之ガ成立スルハ明カナリ。

$\mathfrak{y}$, Quotientenkörper $K = \text{於テ } \mathfrak{p}^{-1} \neq \alpha \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{y} \text{ ナル } \alpha \text{ ノ全体トスルト之ハ } \mathfrak{y} \text{ ノ gebrochenes Ideal トナス。}$

定理 3. $\mathfrak{p}$ ナ $\mathfrak{y}$ ノ Primideal (ganz) トスルト $\mathfrak{p}^{-1} \supset \mathfrak{y} \text{ ナリ。}$

証明. $\mathfrak{y} \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}$ ナル故ニ $\mathfrak{y} \subseteq \mathfrak{p}^{-1}$ ハ明カナリ。

今 $a \in \mathfrak{p}$ トスルト $(a) \subseteq \mathfrak{p}$ ナリ。

ソコデ $(a) = \mathfrak{p}$ トスルト $\frac{1}{a} \in \mathfrak{p}^{-1}$, $\frac{1}{a} \neq \text{ganz}$ ナリ。
何故ナラバ $\frac{1}{a} = b = \text{ganz}$ トスルト $a \in \mathfrak{p}$ ナル故
 $1 = ab \in \mathfrak{p}$, 即チ $\mathfrak{y} = \mathfrak{p}$ トナリ $\mathfrak{y} \supset \mathfrak{p}$ ナス。故ニ
 $\frac{1}{a} \neq \text{ganz}$. 従ツテコノトキハ $\mathfrak{p}^{-1} \supset \mathfrak{y} \text{ ナリ。}$

次ニ $(a) \subset \mathfrak{p}$ トスル。

$\overline{\mathfrak{y}} = \mathfrak{y}/(a)$ ノ Radikal $\mathfrak{r}$ トスルト

$$\overline{\mathfrak{y}} = \overline{\mathfrak{y}}/\mathfrak{r} = \overline{\mathfrak{l}}_1 + \dots + \overline{\mathfrak{l}}_n,$$

$\overline{\mathfrak{l}}_i$: minimales Ideal

トナリ $\overline{\mathfrak{y}}$ ノ Primideal ハ $\overline{\mathfrak{p}}_i = \overline{\mathfrak{l}}_1 + \dots + \overline{\mathfrak{l}}_{i-1} + \overline{\mathfrak{l}}_{i+1} + \dots + \overline{\mathfrak{l}}_n$, ($i = 1, 2, \dots, n$) ナリ。 $\mathfrak{y} \sim \overline{\mathfrak{y}} \sim \overline{\overline{\mathfrak{y}}}$
ニ於テ $\mathfrak{p} \sim \overline{\mathfrak{p}} \sim \overline{\overline{\mathfrak{p}}}$ トスルト $\mathfrak{p} \supset (a)$ ナル故 $\overline{\mathfrak{p}} \wedge \overline{\mathfrak{y}}$ ノ
Primideal.

従ツテ $\overline{\mathfrak{p}} \supset \mathfrak{r}$, 従ツテ $\overline{\mathfrak{p}} \wedge \overline{\mathfrak{y}}$ ノ Primideal ナリ。
即チ $\mathfrak{p} \wedge \overline{\mathfrak{y}}$ ナ $\mathfrak{y}$ ノ Primideal ニ對應スル。例ヘバ

$\bar{p} \sim \bar{\bar{p}}$ トスル。 $\bar{p} : \bar{l} : = \bar{0}$ +ル故 = $y \sim \bar{y} =$ 於テ $\bar{l} :$
 = 對應スル $\bar{y}$ / Element 全体ヲ $\bar{l}$ トスルト明ラカニ
 $\bar{l} \supset \bar{r} \supset \bar{0} =$ シテ $\bar{p} \bar{l} \leq \bar{r} + 1$ 。 $\text{コゝ} = \bar{0}$ 、ハ $\bar{y}$ /
 Null。 $\bar{0}$ 、ハ $\bar{y}$ / Null トス。 又 $\bar{p} \bar{l} \leq \bar{r} + 1$ = 對シテ
 Minimalbedingung ヲ有スル Ring = アリテハ
 Radikal ハ nilpotent ナリ。 (C. Hopkins.
 Duke. Math. 4)

從ツテ $\bar{r} \supset \bar{p} \bar{l} + 1$ 故 = アル自然数 $\nu =$ 對シテ
 $\bar{p}^\nu \bar{l}^\nu = \bar{0}$ トナル。 又 $\bar{l} \supset \bar{r} + 1$ 故 $\bar{l}^M \neq \bar{0}$ ($M=1,$
 $2, \dots$) ナリ。 $\forall$ コテ $\bar{p}^i \bar{l}^\nu = \bar{0}$ トナル i / 最小ノ自然
 数ヲ λ トスルト $\bar{p}^\lambda \bar{l}^\nu = \bar{0}$, $\bar{p}^{\lambda-1} \bar{l}^\nu \neq \bar{0}$ ナリ。
 $\bar{r} = \bar{p}^{\lambda-1} \bar{l}^\nu$ トスルト $\bar{p} \bar{r} = \bar{0}$, 之レヲ $y =$ 於ケル関係 = 直
 スト $\bar{p} \bar{r} \leq (a) + 1$ 。 $\text{コゝ} = \bar{r}$ 、ハ $y \sim \bar{y} =$ 於テ $\bar{r}$ /
 Element = 對應スル y / Element 全体 + 1 トス。
 $\forall$ $\bar{r} \supset \bar{0} + 1$ 故 = $\bar{r} \supset (a) + 1$ 。 從テ $C \bar{p} \leq (a)$,
 $C \neq (a) C \in \bar{r}$, ナル C が存在スル。 依テ $\frac{C}{a} \bar{p} \leq y$, $\frac{C}{a} + \text{gang}$ ナ
 リ。 故 = $\bar{p}^\lambda \supset y + 1$ 。

— 証 終 —

$\forall$ $\bar{r} \supset y \ni 1$ +ル故 $\bar{p} \in \bar{p}^\lambda \bar{p} \leq y + 1$ 。 $\bar{p}$
 ハ teilerlos +ル故 = $\bar{p}^\lambda \bar{p} = \bar{p}$ ナ若シクハ $\bar{p}^\lambda \bar{p} = y + 1$
 ナリ。 $\bar{p}^\lambda \bar{p} = \bar{p}$ トスルト $(\bar{p}^\lambda)^\nu \bar{p} = \bar{p}$, $\nu = 1, 2, \dots$,
 $p \in \bar{p}$, $p' \in \bar{p}^\lambda$ トスルト $p'^\nu p \in \bar{p} \subset y$, $\nu = 1, 2, \dots$
 從ツテ $\Pi = \exists$ $p' \in y$ 。 即チ $\bar{p}^\lambda \leq y + 1$ 。 之 $\bar{p}^\lambda \supset y =$
 反ス。 從ツテ

定理4. $p^{-1}p = y + 1$.

之レヨリ任意ノ自然数 m ニ對シ $p^m \supset p^{m+1} + 1$ トコトガワ
カル。ソレハ $p \supset p^{m+1} + 1$ トル故、今 $p^m = p^{m+1}$ トスルト
 $p^m (p^{-1})^m = p^{m+1} (p^{-1})^m$. 即チ $y = p + 1$ 、 $y \supset p$
ニ反ス。故ニ $p^m \supset p^{m+1} + 1$ 。同様ニシテ $p_1, p_2, \dots, p_n$
ヲ *Primideal*, $m_1, m_2, \dots, m_n$ ヲ任意ノ自然数
トスルトキ $p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_n^{m_n} \supset p_1^{m_1+1} p_2^{m_2} \dots p_n^{m_n} + 1$ トル
コトニ、亦 $p^m \supset \mathfrak{o} \supset p^{m+1}$ トラバ $p^m = \mathfrak{o} + 1$ カ若シ
クハ $p^{m+1} = \mathfrak{o}$ トルコトニ合ル。

以下 i, m, μ, ν ハ自然数ヲ表ハシ、 $y \sim \bar{y} = y/\mathfrak{o}$
ニ於テ y / *Primideal* p ト $\bar{y}$ / *Primideal* $\bar{p}$ ト
ハ對應スルモノトシ、 $\bar{0}$ ハ $\bar{y}$ / *Null* トス。ノチス
ルト

定理5. (1) $p^m \supset \mathfrak{o}$, $p^{m+1} \not\supset \mathfrak{o}$ トスルト $\bar{p}^m = \bar{p}^{m+i}$,
 $i = 1, 2, \dots$
(2) $(p^m \supset) p^{m+1} \supset \mathfrak{o}$ トラバ $\bar{p}^m \supset \bar{p}^{m+1} \supset \bar{0} =$
ニテ又逆ガ成立スル。
(3) $\bar{p}^{m+1} \supset \bar{p}^m = \bar{p}^{m+1} \neq \bar{0}$ トスルト $p^m \supset \mathfrak{o}$,
 $p^{m+1} \not\supset \mathfrak{o} + 1$ 。

証明

(1) $p^m, \mathfrak{o}, p^{m+1} \not\supset \mathfrak{o} + 1$ 故 $p^m \supset (p^{m+1}, \mathfrak{o}) \supset$
 p^{m+1} . 従ツテ $p^m = (p^{m+1}, \mathfrak{o}) + 1$.
依ツテ $p^{m+1} = (p^{m+2}, \mathfrak{o}p) = \dots$.
 $p^m = (p^{m+2}, \mathfrak{o}p, \mathfrak{o}) = (p^{m+2}, \mathfrak{o}) + 1$.

同様ニシテ $\mathfrak{f}^m = (\mathfrak{f}^{m+i}, \mathfrak{o})$.

故ニ $\bar{\mathfrak{f}}^m = \bar{\mathfrak{f}}^{m+i}$, $i = 1, 2, \dots + 1$.

(2) $\mathfrak{f}^m \supset \mathfrak{f}^{m+1} \supset \mathfrak{o}$ ナラバ $\bar{\mathfrak{f}}^m \supset \bar{\mathfrak{f}}^{m+1} \supset \bar{\mathfrak{o}}$ ナルコトハ明ラカナリ。

逆ニ $\bar{\mathfrak{f}}^m \supset \bar{\mathfrak{f}}^{m+1} \supset \bar{\mathfrak{o}}$ ナルトス。今 $\mathfrak{f}^m \supset \mathfrak{f}^{m+1} \supset \mathfrak{o}$ が成立シナイトスルト $\mathfrak{f}^m \not\supset \mathfrak{o}$ カ又ハ $\mathfrak{f}^m \supset \mathfrak{o}$, $\mathfrak{f}^{m+1} \not\supset \mathfrak{o}$ ナリ。今 $\mathfrak{f}^m = \mathfrak{o}$ 又ハ $\mathfrak{f}^{m+1} = \mathfrak{o}$ ナルコトハ $\mathfrak{f}^{-m}$, $\mathfrak{f}^{-m+1} \supset \bar{\mathfrak{o}}$ ヨリ成立セズ。サテ (1) = ヨリ $\mathfrak{f}^m \not\supset \mathfrak{o}$ ナルトキモ $\mathfrak{f}^m \supset \mathfrak{o}$, $\mathfrak{f}^{m+1} \not\supset \mathfrak{o}$ ナルトキモ $\bar{\mathfrak{f}}^m = \bar{\mathfrak{f}}^{m+1}$ ナリ $\bar{\mathfrak{f}}^m \supset \bar{\mathfrak{f}}^{m+1} = \bar{\mathfrak{f}}$ ナル。故ニ $\mathfrak{f}^m \supset \mathfrak{f}^{m+1} \supset \mathfrak{o}$ ナリ。

(3) $\bar{\mathfrak{f}}^{m-1} \supset \bar{\mathfrak{f}}^m = \bar{\mathfrak{f}}^{m+1} \neq \bar{\mathfrak{o}}$ ヨリ (2) ヨリ $\mathfrak{f}^{m-1} \supset \mathfrak{f}^m \supset \mathfrak{o}$, 従ツテ $\mathfrak{f}^m = (\mathfrak{f}^{m+1}, \mathfrak{o})$ ナリ。

—— 証終リ ——

ソコデ $\mathfrak{f}^{m+1} \supset \bar{\mathfrak{f}}^m = \bar{\mathfrak{o}}$ ナルト $\mathfrak{f}^{m-1} \supset \mathfrak{o} \supset \mathfrak{f}^m$ ナリ $\mathfrak{o} = \mathfrak{f}^m$ ナル。 $\mathfrak{f} \supset \mathfrak{o}$ ナルト $\bar{\mathfrak{y}} = \mathfrak{y}/\mathfrak{o} = \mathfrak{f}/\mathfrak{o}$ ナル。 $I = \mathfrak{f} \supset \mathfrak{f}^2 \supset \dots \supset \mathfrak{f}^m = \bar{\mathfrak{f}}^{m+1} = \dots$ ナリ。

従ツテ $\bar{\mathfrak{f}}^m = \bar{\mathfrak{o}}$ ナルト $\mathfrak{f}^m = \mathfrak{o}$ ナリ、 $\bar{\mathfrak{f}}^m \supset \mathfrak{o}$ ナルト $\mathfrak{f}^m \supset \mathfrak{o}$, $\mathfrak{f}^{m+1} \not\supset \mathfrak{o}$ ナリ。即チ

定理 6. $\mathfrak{f} \supset \mathfrak{o}$ ナルトキハ $\mathfrak{f}^m = \mathfrak{o}$ ナルカ、若シクハ $\mathfrak{f}^m \supset \mathfrak{o}$, $\mathfrak{f}^{m+1} \not\supset \mathfrak{o}$ ナリ、コノ m ハ *eindeutig* = 定マル。

又 $\bar{\mathfrak{y}} = \mathfrak{f}/\mathfrak{o}$ ナル $\bar{\mathfrak{f}}_1, \dots, \bar{\mathfrak{f}}_n = \bar{\mathfrak{o}}$ ナラバ $\bar{\mathfrak{y}} = \mathfrak{h} \bar{\mathfrak{f}}_1, \dots, \bar{\mathfrak{f}}_2$ 以外ニ *Primideal* ハ存在シナイ。ソレハ若シ他ニ $\bar{\mathfrak{f}} \mathfrak{f}$

リトスルト $\bar{y} = (\bar{f}, \bar{f}_1^{\nu_1}, \dots, \bar{f}_n^{\nu_n}) = (\bar{f}, \bar{0}) = \bar{f}$ トナ
 リ $y \cap \bar{f} =$ 反スルカラデアル。

従ッテ $\bar{y}$ / Primideal $\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n$ トスルト
 如何 = 自然数 μ_i : $\exists$ エラント $\bar{f}_1^{\mu_1}, \dots, \bar{f}_n^{\mu_n} \neq \bar{0}$,
 $1 \leq i \leq n-1$, $\nu_1, \dots, \nu_n$ ハ $1, 2, \dots, n$ / 中 / i 個 /
 数 / アル 順列 ナリ。 従ッテ

定理 7. α $\exists$ 含ム Primideal $f_1, \dots, f_n$ トスルトキ
 自然数 μ_i : $\exists$ 如何 = トッテ $\alpha = f_1^{\mu_1} \dots f_n^{\mu_n}$,
 $1 \leq i \leq n-1$, $\nu_1, \dots, \nu_n$ ハ $1, \dots, n$ / 中 / i 個
 / アル 順列。

ソコデ

定理 8. α $\exists$ 含ム スベテ / Primideal $f_1, \dots, f_n$
 トスル。

コ / トキ $n=1$ ナラバ $\alpha = f^m$ トナル。 m ハ アル 自然
 数。

$n=2$ ナラバ $f_i^{m_i} \cap \alpha$, $f_i^{m_i+1} \nsubseteq \alpha$ トナル 自然数 m_i
 が定マリ

$$\alpha = f_1^{m_1} \dots f_n^{m_n}$$

ナリ。

尚コ / Zerlegung ハ eindeutig ナリ。

証明:

$f_i \supseteq \alpha$ ナル故 $f_i^{m_i} = \alpha$ カ又ハ $f_i^{m_i} \cap \alpha$, $f_i^{m_i+1} \nsubseteq \alpha$
 / 何レカ = 定マリカナル m_i ハ一定スル。

$n=1$ ナルトキ $f^m \cap \alpha$, $f^{m+1} \nsubseteq \alpha$ トスルト

$y \supset \mathfrak{o}(\mathfrak{f}^{-1})^m = \text{シテ } \mathfrak{o}(\mathfrak{f}^{-1})^m \text{ハ } y \text{, ganzes Idea}$
 $\text{ナル故} = y \supset \mathfrak{f}' \supseteq \mathfrak{o}(\mathfrak{f}^{-1})^m \supseteq \mathfrak{o} \text{ナル Primideal}$
 $\mathfrak{f}' \text{が存在スル。 } n=1 \text{ナル故 } \mathfrak{f}' = \mathfrak{f} \text{トナリ、 } \mathfrak{f}^{m+1} \supset \mathfrak{o}$
 $\text{トナル。之レ } \mathfrak{f}^{m+1} \not\subset \mathfrak{o} = \text{反ス。故} = \text{コノトキハ } \mathfrak{o} = \mathfrak{f}^m$
 ナリ。

$n \geq 2 \text{ナルトキハ } \mathfrak{f}_i^{m_i} \supset \mathfrak{o}, \mathfrak{f}_i^{m_i+1} \not\subset \mathfrak{o} \text{ナル場合ナ}$
 $\text{リ。ソレハ } \mathfrak{f}_i^{m_i} = \mathfrak{o} \text{トスルトモ } \Rightarrow \text{他} = \mathfrak{o} \text{ヲ含ム Prim-}$
 $\text{ideal, 無いコト} = \text{ナリ } n \geq 2 = \text{反ス。}$

$\text{サテ } (\mathfrak{f}_i, \mathfrak{f}_j) = y \text{ (} i \neq j \text{)ナル故} =$

$$\mathfrak{o} \subseteq \mathfrak{f}_1^{m_1} \wedge \dots \wedge \mathfrak{f}_n^{m_n} = \mathfrak{f}_1^{m_1} \dots \mathfrak{f}_n^{m_n}$$

ナリ。ソコデ

$$\mathfrak{o} \subset \mathfrak{f}_1^{m_1} \dots \mathfrak{f}_n^{m_n}$$

トスルト

$$\mathfrak{o}(\mathfrak{f}_1^{-1})^{m_1} \dots (\mathfrak{f}_n^{-1})^{m_n} \subset y$$

$\text{トナリ } \mathfrak{o}(\mathfrak{f}_1^{-1})^{m_1} \dots (\mathfrak{f}_n^{-1})^{m_n} \text{ハ } y \text{, ganzes Ideal}$
 $\text{ヲナス故} =$

$$\mathfrak{o}(\mathfrak{f}_1^{-1})^{m_1} \dots (\mathfrak{f}_n^{-1})^{m_n} \subseteq \mathfrak{f}' \subset y$$

ナル Primideal $\mathfrak{f}'$ が存在スル。従ツテ

$$\mathfrak{o} \subseteq \mathfrak{f}' \mathfrak{f}_1^{m_1} \dots \mathfrak{f}_n^{m_n} \subseteq \mathfrak{f}'$$

$\text{トナリ, } \mathfrak{f}_1, \dots, \mathfrak{f}_n \text{ハ } \mathfrak{o} \text{ヲ含ム Primideal, スベテ}$
 ナアルカラ

$$\mathfrak{f}' = \mathfrak{f}_i$$

ナル $\mathcal{F}_i$ がアル。ソウスルト

$$\alpha \leq \mathcal{F}_1^{m_1} \cdots \mathcal{F}_i^{m_{i+1}} \cdots \mathcal{F}_n^{m_n} \subset \mathcal{F}_i^{m_{i+1}}$$

トナリ始メ、 $\mathcal{F}_i^{m_{i+1}} \neq \alpha$ トシタノ = 反ス。

故ニ

$$\alpha = \mathcal{F}_1^{m_1} \cdots \mathcal{F}_n^{m_n}$$

ナリ。

尚コ、*Zerlegung, eindeutig* ナルコトハ明

ラカナリ。

—— 証終リ ——

(以上)