



Title	Operators ノ one-parameter Group ニツイテ
Author(s)	深宮, 政範
Citation	全国紙上数学談話会. 1940, 199, p. 255-263
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74799
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

869 Operators / one-parameter
Group = ヲイテ

深 宮 政 範 (阪大)

$U_t, \infty < t < \infty$ $\rightarrow$ Banach 空間 $E \rightarrow E$ 自身へ
移ス isometric $\rightarrow$ operators / one-paramet-
ric group トシマス: 即チ

$$(i) \quad \|U_t\| = 1, \quad (ii) \quad U_t U_s = U_{t+s},$$

(ii) U_t は weakly measurable ($f(U_t x)$ が凡て $x \in E$ 及び $f \in \bar{E}$ に対して t , numerical measurable function である)⁽¹⁾

既 = Stone, von Neumann = ヲツテ E が Hilbert 空間テ, U_t が unitary operator + ∞ 場合 = ヲイテカ・ル group U_t , analytical representation が論ゼラレテ居リマス。(Stone, Annals of Math., 33 (1931), pp 643-648; von Neumann, Annals of Math., 33 (1931), pp 567-573.)

最近 L. Gelfand が C. R. U. R. S. S. 25 (1939) デコノ問題ヲ論ジテ居リマス。Gelfandノ方法ハ群 U_t ノ "Differentiation"ヲ用フルトイフ所ガ要点デアル様ニ思ハレル。⁽²⁾ 然シ同じ結果ハ "Differentiation"ノ代ニ "Integration"ヲ用フルコトニヨツテ、ヨリ精確ニ出セルコトヲ注意シタイ。

即チ Resolventsヲ定義スル Stoneノ方法ガソノママ用ヒラレルノデアル。

$$\psi(\tau; Z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda - Z} e^{-i\lambda\tau} d\lambda \quad (\text{Im}(Z) \neq 0)$$

(1) U_t が weakly measurable + ∞ 必 strongly continuous: $t \rightarrow t_0 + \tau$ 必 $U_t \rightarrow U_{t_0}$ (strongly)

(2) D. S. Nathan, Duke Math. Journ., 1 (1936) ヲ参照サレタイ。

トスレバ

$$\begin{aligned}\psi(\tau; z) &= \begin{cases} 0 & \tau > 0 \\ ie^{-iz\tau} & \tau < 0 \end{cases} \quad (\operatorname{Im}(z) > 0) \\ &= \begin{cases} -ie^{-iz\tau} & \tau > 0 \\ 0 & \tau < 0 \end{cases} \quad (\operatorname{Im}(z) < 0)\end{aligned}$$

及ヒ

$$\begin{aligned}(z - z') \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\tau; z) \psi(\sigma - \tau; z') d\tau \\ = \psi(\sigma; z) - \psi(\sigma; z')\end{aligned}$$

今 $x \in E$, $f \in \bar{E}$ トシテ

$$F(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t; z) f(\cup_t x) dt \quad (\operatorname{Im}(z) \neq 0)$$

ヲ考ヘルト $F(f) \in \bar{E}$, 上デ, *weakly continuous functional* デアル。夫レハ x ノ様ニ考ヘレバ容易ニ分ル。

証明スベキコトハ $f_n \rightarrow f$ (*weakly*) , 特 $F(f_n) \rightarrow F(f)$ デアル。 $f_n \rightarrow f$ (*weakly*) + ラベ $\|f_n\| \leq M$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)

從ツテ $\varphi_n(t) = f_n(\cup_t x)$ ハ有界デ

$$|\varphi_n(t)| \leq M \cdot \|f\| \cdot \|x\| = M,$$

$$\varphi_n(t) \rightarrow \varphi(t) = f(\cup_t x)$$

從ツテ

$$\int \psi(t; z) f_n(\cup_t x) dt \rightarrow \int \psi(t; z) f(\cup_t x) dt.$$

($\psi(t; z)$ は absolutely integrable $(-\infty, \infty)$)

即ち $F(f_n) \rightarrow F(f)$

依ッテ Banach の定理 = ヨッテ E が separable
スハ regular ナラバ $X =$ 對シテ $X_2 \in E$ が存在シテ
凡テ $f \in \bar{E} =$ 對シテ

$$F(f) = f(X_2)$$

が成立スル。 $R_z \cdot X = X_2$ ト定義スレバ茲 = complex
number z ($\text{Im}(z) \neq 0$) = 對シテ U_t 宛 operator
が定マル。(之ハ Hilbert 空間デ Resolvent
ト呼バレル。Metric Ring = 於ケル Resolvent
= ヨイテハ 早ク南雲先生、吉田氏 = ヨッテ論ゼラレテキル
コトハ周知デアラウ)。

1. R_z ハ E デ定義サレタ linear operator デアル:
 ν :

$$\begin{aligned} |f(R_z \cdot x)| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(U_t x)| \cdot |\psi(t; z)| dt \\ &\leq \frac{\|f\| \cdot \|x\|}{|\text{Im}(z)|}, \end{aligned}$$

$$\|R_z\| \leq \frac{1}{|\text{Im}(z)|}$$

2. $(z - z') R_z R_{z'} = R_z - R_{z'}$. ($\text{Im}(z) \neq 0$,
 $\text{Im}(z') \neq 0$).

何トナレバ

$$f(R_z R_{z'} x) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t; z') f(U_t R_z x) dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} \psi(s; z) \psi(t; z') f(\mathcal{U}_{t+s} X) ds \quad (2)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathcal{U}_t X) dt \int_{-\infty}^{\infty} \psi(s; z) \psi(t-s; z') ds$$

$$(z-z') f(R_z R_{z'} X) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathcal{U}_t X) (\psi(t; z) - \psi(t; z')) dt$$

$$\text{故} = (z-z') R_z R_{z'} = R_z - R_{z'}$$

3. アル $z, (\Im m(z) \neq 0) =$ 対シテ $R_z X = 0$ + ラバ $X=0$

上ノ式ヲ用ヒテ $R_z X = 0$ + ラバ $R_z X = 0$ カルヲノ

又 $(\Im m(z) \neq 0) =$ 対シテ成立スルカラ 特ニ

$-\infty < \xi < \infty =$ 対シテ

$$0 = f(R_z X) - f(R_{\bar{z}} X)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathcal{U}_t X) e^{-\eta|t|} e^{-i\xi t} dt,$$

$$z = \xi + i\eta, \quad \eta \neq 0$$

依ツテ $f(\mathcal{U}_t X) = 0$ カルヲノ ($f(\mathcal{U}_t X)$ ハ連続!)

$t =$ 対シテ成立ツ。特ニ $t=0$ トスレバ $f(X) = 0$,

$f \in \bar{E}$ ハ任意デアルカラ $X=0$

4. operator A .

(2) 茲デ $\mathcal{U}_t R_z = R_z \mathcal{U}_t$ 即チ $\mathcal{U}_t$ ト integration トガ

commute スルコトヲ假定スル必要ハナイ。

コノ貴重ナ注意ハニ付氏カラ受ケタ。

$z_0 \neq 0$ $\Im m(z_0) \neq 0$ + ルーツ, complex number λ , $y = R_{z_0} x$ ($x \in E$, 任意, point) $\Rightarrow x + z_0 \cdot R_{z_0} x =$ 對應セル operator $\neq A$ トスル:

$$y = R_{z_0} x, Ay = x + z_0 R_{z_0} x.$$

$x \in E$ 全体ヲ動かトキ $y = R_{z_0} x \in E \Rightarrow$ dense set $\neq$ 作ル. 従ッテ A の domain $D(A) \cap E \Rightarrow$ dense $\neq$ 有ル. 何トナレバ $f \in \bar{E}$, $y \in D(A) \Rightarrow$ 對シテ $f(y) = 0$ トスルバ

$$f(y) = f(R_{z_0} x) = 0, x \in E;$$

特 = $\Im m(z_0) > 0$, トキハ

$$\begin{aligned} 0 &= f(R_{z_0} U_t x) = i \int_{-\infty}^0 e^{iz_0 \tau} f(U_\tau U_t x) d\tau \\ &= i e^{-iz_0 t} \int_{-\infty}^t e^{iz_0 s} f(U_s x) ds \end{aligned}$$

カバテ, $t =$ 對シテ成立ツカラ $f(U_t x) = 0$ 特 = $f(x) = 0$ ($x \in E$).

依ッテ $f \equiv 0$

又, 明カ = A の additive.

$$5. R_z (A - zI) y = (A - zI) R_z y = y. \quad (y = R_{z_0} x)$$

簡單 + 計算ヲ,

$$\begin{aligned} R_z (A - zI) y &= R_z (x + z_0 R_{z_0} x - z R_{z_0} x), \\ (A - zI) R_z y &= A(R_{z_0}(R_z x)) - z R_z R_{z_0} x \\ &= R_z x + z_0 R_{z_0} R_z x - z R_z R_{z_0} x \end{aligned}$$

$$R_z (A - zI) y = (A - zI) R_z y = R_z x + (z_0 - z) R_z R_{z_0} x$$

$$= R_Z X + (R_{Z_0} X - R_Z X) = R_{Z_0} X = y.$$

= ヨツテ 允ル.

6. A closed operator である. 何トナレバ

$$y_n = R_{Z_0} x_n \rightarrow y, \quad A y_n = x_n + Z_0 R_{Z_0} x_n \rightarrow \bar{y}$$

$$\text{トナレバ } x_n = A y_n - Z_0 y_n \text{ であるから } x_n \rightarrow \bar{x},$$

$$\text{従って } y = R_{Z_0} \bar{x}, \quad A y_n = x_n + Z_0 R_{Z_0} x_n \rightarrow \bar{x} + Z_0 R_{Z_0} \bar{x}$$

$$= A y.$$

依って A は closed.

7. A の定義が個々の Z_0 へ實際に depend しないコ

トヲ示したい. 之レハ $D(A)$ がソウであるコトヲ云

へバヨイ. 何トナレバ $Z_0 \rightarrow A, \quad Z'_0 \rightarrow A'$ 且ッ

$$D(A) \equiv D(A') \text{ ナラバ } \text{ 是 } = \text{ ヨツテ}$$

$$R_Z (A - Z I) = I, \quad R_Z (A' - Z I) = I$$

$$\text{in } D(A) \equiv D(A')$$

$$\text{カラ } R_Z (A - A') = 0, \text{ in } D(A) \equiv D(A'),$$

$$\S 3 = \text{ヨツテ}$$

$$A = A' \quad \text{in } D(A) \equiv D(A').$$

$$D(A) = D(A') \text{ ヲ示スハ } D(A') \subset D(A) \text{ ヲ云へバヨ}$$

イ. (反對に同じコトである)

$$y' = R_{Z'_0} x \in D(A') = \text{對シテ } y = R_{Z_0} x \in D(A) \text{ ナ}$$

トナレバ

$$y - y' = R_{Z_0} x - R_{Z'_0} x = (Z_0 - Z'_0) R_{Z_0} R_{Z'_0} x$$

$$\text{ナ, } y \in D(A), \quad R_{Z_0} (R_{Z'_0} x) \in D(A),$$

$$\text{従って } y' \in D(A).$$

$$\text{故ニ } D(A') \subset D(A)$$

8. 最后 = "Differentiation" トノ 関係 = ツイテ

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{U_t - I}{t} y = Ay \quad y \in D(A)$$

ヲ 証明 シヨウ (Differentiation = ヨル 方法 デハ
之レガ A ノ 定義 デアル).

$$y = R_{z_0} x, \quad \Im m(z_0) > 0 \quad \text{ト スル。}$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{U_t - I}{t} R_{z_0} x\right) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(U_{\tau} x) \frac{\psi(\tau - t; z_0) - \psi(\tau; z_0)}{t} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^0 + \int_0^{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty}, \end{aligned}$$

$\psi(\tau; z)$ ノ 定義 = ヨツテ

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \int_{-\infty}^0 = z_0 f(R_{z_0} x);$$

$$\int_0^{\varepsilon} f(U_{\tau} x) \frac{\psi(\tau - t; z_0) - \psi(\tau; z_0)}{t} d\tau$$

$$= \int_0^{\varepsilon} f(U_{\tau} x) \frac{\psi(\tau - t; z_0)}{t} d\tau$$

$$= \frac{1}{t} \int_{-t}^0 f(U_{t+\sigma} x) \psi(\sigma; z_0) d\sigma$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^{\varepsilon} = f(U_0 x) \psi(0; z_0) = f(x)$$

故 =

$$\lim_{t \rightarrow 0} f\left(\frac{U_t - I}{t} R_{z_0} x\right) = f(x) + z_0 f(R_{z_0} x) = f(Ay)$$

[注意] U_t と A との直接の関係 = ツイテハ I. Gelfand ハ

$$U_h = \exp(hA) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} A^n$$

ヲ証明シテ牛ル。茲デハコノ急 = ハ 立入ヤナイコ
ト = シタイ。