



Title	二次數体ニ於ケル Euclid 乃 Algorithm ニ對スル覺書（第二報）
Author(s)	武隈, 良一
Citation	全国紙上数学談話会. 1940, 200, p. 287-293
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74802
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

872 二次数体 = 於ケル Euclid 乃 Algorithm
 = 對スル 覽書 (第一報)*

武隈 良一 (札幌)

Euclid / Algorithm トイフ、ハ御承知、如
 7, 二整数 $\alpha, \beta \neq 0$ が與ヘラレタトキ

$$\alpha = \beta \gamma + \delta \quad |\delta| < |\beta| \quad (a)$$

ヲ満足スル整数 γ , 及ビ δ ヲ求メルコトデアリマス。

今 α, β 7 = 次数体 $K(\sqrt{D})$, 整数ト考ヘルトキ
 (a) ハ次ノ如クナツテ

(*) 第一報ハ月刊數學昭和十三年四月号ニ掲載

$$|N(\alpha - \beta\gamma)| < |N(\beta)|$$

$$\text{コゝテ } \frac{\alpha}{\beta} = \varepsilon + \delta$$

$$|N(\varepsilon - \delta)| < 1 \quad (b)$$

トナリマス。従ツテ $K(\sqrt{D})$ = 於ケル任意, 整数 α, β が
興ヘテレタトキ (b)ヲ満足スル γ が存在スルナラバ

$K(\sqrt{D})$ の Euclid Algorithm (今後簡単, スキ =
E. A. ト書ク) が成立スルニ次歟体デアリマス。

サテ D が如何ナル値ヲトルトキ $K(\sqrt{D})$ = 於テ E. A.
が成立スルデセリカ。以下之ニ就テ今日迄ニ得ラレタ大体
ノ結果ヲ記シテオカウト思ヒマス。

$D < 0$ ノ場合ニツイテハ Birkhoff [1]** が早ク
カラ幾何學的解法ヲ得テ居リマスが Dickson [2] ノ著
書ニモ論ゼラレテアリマス。即チ

$$D = -1, -2, -3, -7, -11$$

ノ場合ニハ E. A. が成立スルト証明シテアリマス。而
シテ $D < 0$ ノ場合ハ之レ以上調べル必要ハナク問題
ハ $D > 0$ = 於テ複雑トナツテ居リマス。今

$$D = 2, 3, 5, 6, 7, 11, 13, 17, 19, 21, 29, 33, \\ 37, 41, 57.$$

トスルトキ此ノ場合ニ E. A. が成立スルコトハ多クノ人ニヨ
ツテ証明サレテ居リマス。即チ

$$\text{Dickson [2] } D = 2, 3, 5, 13$$

** [n] ハ後掲文献ノ番号ヲ示ス。

O. Perron [3] $\rightarrow 2, 3, 5, 6, 7, 11, 13, 17,$
 $21, 29.$

Oppenheim [4] $\rightarrow 2, 3, 5, 6, 7, 11, 13, 17,$
 $33, 37, 41.$

Remak [5] $\rightarrow 5, 13, 17, 21, 29, 33, 37, 41.$

Berg [6] $\rightarrow 19.$

Hofreiter [7] $\rightarrow 57.$

1 場合ヲ証明シテ居リマス。

次ニ E. A. が成立シテイ場合ハ如何ナルトキカト云フ

ニ、ソレニ就テハ

Oppenheim [4] $\rightarrow 23, 31, 53.$

I. Schur [4] $\rightarrow 47.$

Berg [6] $\rightarrow D \not\equiv 1 \pmod{4}$ ナル或場合。

Hofreiter [7] [8] $\rightarrow 77, 14 + 24n (n \geq 1).$

$21 + 24 (n > 0).$

ナルトキ不成立ナルト証明シテ居リマス。

以上ハ大体 1935 年迄ニ得ラレタ結果デアリマスが其
ノ後ハモット研究が進ンデ居リマス。

元來 E. A. が成立スル二次環体ニ於テハ G. C. M. が
定マル故 Ideal ハ Haupt Ideal トナリ環体ノ
Klassenzahl が 1 ナル故我々ハ先ヅ Klassen-
zahl が 1 ナル如キ D 式ヲ考ヘルニヨリコトニナル。
ソレニ關シテハ次ノ定理ガアリマス。

定理. $K(\sqrt{D})$ ノ Klassenzahl が 1 ナル

ハ次ノ場合ニ限ル。

$$\text{I. } D = p \equiv 1 \pmod{4}$$

$$\text{II. } D = pq \equiv 1 \pmod{4}$$

$$\text{但シ } p \equiv q \equiv 3 \pmod{4}$$

$$\text{III. } D = 2.$$

$$\text{ハ } D = 2p, \text{ 但シ } p \equiv 3 \pmod{4}$$

$$\text{IV. } D = p \equiv 3 \pmod{4}$$

但シ, $\pm$ 於ケル p, q ハ 2 + ラザル相異 + レル
正ノ素数トス。

証明. 二次數体論ニ譲ル。

斯如ク D ノ分類シテオイテカラ H. Behrbohn ト

L. Rédei [9] ハ次ノ定理ヲ証明シテ居リマス。

定理.

A. $D \equiv 2 \pmod{4}$ + ルトキ E. A. ノ成立スルハ $D = 2, 6$
ノ時ニ限ル。

B. $D \equiv 3 \pmod{4}$ + ルトキ E. A. ノ成立スルハ $D = 3,$
 $7, 11, 19$ ノ時ニ限ル。

C. $D = p \cdot q \equiv 5 \pmod{8}$ + ルトキ E. A. ノ成立シ
+ イ。但シ $D = 3p, p \equiv 3 \pmod{4}$ + ラズト
ス。

D. $D \equiv 5 \pmod{24}$ + ルトキ E. A. ノ成立スル
ハ $D = 5, 29$ ノ時ニ限ル。

証明: 省ク。

以上ニヨリ問題ハ次ノ場合々々ガ残ツテ居リマス。

$$\text{I. } D = p \equiv 1, 13, 17 \pmod{24}$$

$$\text{II. } D = p \cdot q \equiv 1, 9, 17 \pmod{24}$$

$$\text{但し } p \equiv q \equiv 3 \pmod{4}$$

コノ中主トシテ II 1 場合ニツイテ L. Schuster [10] ガ
次ノ定理ヲ証明シテ居リマス。

定理

$$(a) \quad D = 24n + 1 = p \cdot q$$

$$p \equiv q \equiv 7, 11, 19, 23 \pmod{24}$$

$$(b) \quad D = 24n + 9 = (8n + 3) \cdot 3 = p \cdot q$$

$$q = 3, \quad p \equiv 11, 19 \pmod{24}$$

$$(c) \quad D = 24n + 17 = p \cdot q$$

$$1. \quad p \equiv 7 \pmod{24} \quad q \equiv 23 \pmod{24}$$

$$2. \quad p \equiv 11 \pmod{24} \quad q \equiv 19 \pmod{24}$$

トスルトキ

(b), (c) ノル 場合ニ於テ E. A. ハ 成立シテ、但シ
 $D = 33, 57$ ハ 省ク。又 (a) ニ於テハ次ノ時ニ限り精々
成立ス。

$$1. \quad p \equiv q \equiv 7, 19 \pmod{24}, \quad q < p < \frac{4}{3}q$$

$$2. \quad p \equiv q \equiv 11 \pmod{24}$$

$$q < p < \frac{3}{2}q$$

$$\text{又ハ } \frac{8}{3}q < p < 3q + 17 + \frac{101}{q-6}$$

$$3. \quad p \equiv q \equiv 23 \pmod{24}$$

$$q < p < 3q + 17 + \frac{101}{q-6}$$

証明。省ク。

Schuster ハコノ定理ヲ証明シタ後、次ノ結論ヲ得テ居リマス。即チ $D = p \cdot q < 10000 + \text{ルト}$ $E. A.$ ハ成立シナイ。但シ 21, 33, 57 ハ省クト言フテ居リマス。

反之。Iノ場合ニツイテハ Paul Erdős ト Chao Ko [11] が次ノ定理ヲ証明シテ居リマス。

定理. $D = p = 13 + 24n (n > 1)$

$$D = p = 1 + 8n (n > 7)$$

ナルトキ相當大ナル $p = \text{対シテ}$ $E. A.$ ハ成立シナイ。即チ成立スル場合ハ若シアリトシテ有限個シカナイ。

証明. 省ク。

以上デ大体ノ紹介ヲ終リマスガ、夫等ニ依レバ大マカニ言ヘバ殆ンド問題ハ解決サレタト申シテ差支ヘナイデアリマセウ。残サレタ場合ハ極ク一部トイフコトが出来マス。

文献

- [1] Birkhoff. American Math. Monthly 13, (1906)
- [2] Dickson. Algebren und ihre Zahlentheorie (1927) S. 151.
- [3] O. Perron. Math. Ann 107 (1933) 489-495.
- [4] A. Oppenheim. Math. Ann. 109 (1934)

349-352.

[5] R. Remak. J. D. M. V. 44 (1934)

238-250.

[6] E. Berg. Kungl. Fysiografiska
Sällskapet i Lund Föreläsningar
5 (1935) Nr. 5

[7] N. Hofreiter. Mh. Math. Phys. 42 (1935)

[8] N. Hofreiter. Math. Ann. 110 (1935)

[9] H. Behrbohm und L. Riebel. Crelle
Journal 174 (1936)

[10] Ludwig Schuster. Mh. Math. Phys.
47 (1938)

[11] Paul Erdős and Chao Ko. The Jour
of the London Math. Soc. 13 (1938)

(IXL)