OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	Pythagorian ring 二就テ Ⅰ
Author(s)	吉田, 耕作
Citation	全国紙上数学談話会. 1940, 200, p. 293-299
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74803
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

873. Pythagorian ring ニ就テ I

吉田 耕作（阪大）

"Spectral analysis" ノ代數的取扱ニハ此項ノヒゞックス デアッテ von Neumann H. Frei-

Lenthal, S. Steen, 角谷, P. Halmos, M. Stone 等ニヨッテ夫々ノ方法並ビニ結果ノ報告ガナサレッツアル。以下ニハ"實數体トノ類似"ニ着目シテノ取扱ニヲ述ベテミタイ。未ダ及肯ガ足リナイカラ axiom 等多スギルカモ知レナイ。(尚 Pythagorian トイフ言葉ハ Weyl: Classical Grup カラノ恩ヒ付キデ適切カドウカハ分ラナイ).

公理群 實數体ヲ係數トシタ可換ナ環 R ガ單位 I ヲ有ッテヲルトスル。(以下實數ヲ小文字デ α, β, ……, λ, μ, …… 等 R ノ元ヲ A, B, C …… 等ト記ス) R ハ尚次ノ公理群ヲ滿足スルトスル。

i) $A^2=0$ ナラ $A=0$

ii) B^2 ノ如ク表ハサレル元 A ヲ"正ノ元"ト名ヅケルコトニスルト正ノ元ノ和ハ又正デアル。即チ B, C ニ対シ D ガ定ッテ $B^2+C^2=D^2$. ——之ガ pythagorian ノ由来デス. 又可換ト假定シタカラ積ニ関シテモ pythagorian 即チ正ノ元ノ積ハ正ニナル訳デス。

iii) A ガ正ナルコトヲ $A>0$[1] ト書クコトニスルト"semi-order" $A>B$ ($A-B>0$ ノ意) ニ関シテ R ハ lattice ヲ作ル。即チ任意ノ A, B ニ対シ least upper bound sup (A, B), greatest lower bound inf (A, B) ガ定ル.

---

(1) trivial ナ正ノ元トシテ0ノ入ルコトハ云ワ迄モナイ。

iii)′ 上ニ（下ニ）押ヘラレタ点列 $\{A_n\}$ ニ対シ同ジク $\sup_n (A_n)$ （$\inf_n (A_n)$）ガ定ル。

iv) 連続性. $\sup_n A_n$, $\sup_n B_n$ ガ存在スル場合ニハ $(\sup_n A_n)\circ(\sup_n B_n) = \sup_{n,m}(A_n \circ B_m)$, 但シ $\circ$ ハ＋或ハ×ヲ示スモノトスル。

——（以上）——

公理群カラノ諸結果

1) $A>0$ トスルト $A=B^2$. $B_+ = \sup(B, 0)$, $B_- = \sup(-B, 0)$ トヲクト $B = B_+ - B_-$, 且ツ $B_+ B_- = \sup(-B^2, 0) = 0$ （(iv)ニヨル）デアル。依テ A ノ"正ノ二乗根" $A^{\frac{1}{2}}$ ガ

$$A^{\frac{1}{2}} = B_+ + B_- \qquad (A^{\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}} = A)$$

ト定義出来ル。明ラカニ

$$A^{\frac{1}{2}} = \sup_C (C>0;\ C^2 \leqq A)$$

2) $A>0$ トシ $A_1 = \inf_n (A^n)$, $A_2 = A - A_1$ トヲクト $A_1^2 \geqq A_1$, $A_1 A_2 = 0$ 且ツ $A_2^2 \leqq A_2$

証明. $A_1^2 = \inf_{n,m\geqq 1}(A^{n+m}) \geqq A_1$. $A_1 A_2 \geqq 0$

且ツ $A_1 A_2 = A_1 A - A_1^2 = \sup_{n\geqq 1}(A^{n+1}) - \sup_{n,m\geqq 1}(A^{n+m}) = 0$

カラ $A_1 A_2 = 0$. 次ニ上カラ $A_2^2 = A^2 - 2AA_1 + A_1^2 = A^2 - A_1^2$

従ッテ $A^2-A_1^2 \geqq A-A_1$ ヲ証明スレバヨイ。所ガ

$$A^{n+1}-A^2-A^n+A=A(A-I)^2(A^{n-2}+A^{n-3}+\cdots\cdots+I) \geqq 0$$

ヨカラ $\inf_{n\geqq 1}(A^{n+1})-A^2 \geqq \inf_{n\geqq 1}(A^n)-A$ 即チ

$A\cdot A_1-A^2=A_1^2-A \geqq A_1-A$ ヲ得テ証明ヲ終ル。

3) 1)ニヨリ $0<A<B$ ナラバ $0<A^{\frac{1}{2}}<B^{\frac{1}{2}}$ ヨッテ 2) ニ得タ A_1 ニ對シ $A_1>A_1^{\frac{1}{2}}>A_1^{\frac{1}{2^2}}>\cdots\cdots>A_1^{\frac{1}{2^n}}>\cdots\cdots>0$.

ヨッテ $\lim_{n\to\infty} A_1^{\frac{1}{2^n}}=E$ ガ存在シ[1]且ツ明ラカニ $E^2=E$ (idempotent), $E\geqq A_1$. コノ E ハ

$$AE=A_1=A_1E \geqq E,$$

$$A(I-E)=A_2=A_2(I-E) \geqq I-E$$

ヲ満足スル。

証明. 先ヅ $A_2E=0$. 何者, $A_2E=\lim_{n\to\infty} A_2A_1^{\frac{1}{2^n}}$

$=\lim_{n\to\infty}(A_2^{2^n}A_1)^{\frac{1}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}(A^{2^n-1}\cdot A_2A_1)^{\frac{1}{2^n}}=0$. ヨッテ

$AE=A_1E+A_2E=A_1E$.

又ニ $A_1 \geqq A_1^2$ カラ $A_1^{2^n} \geqq A_1^{2^{n+1}}$, 之ヲ開イテ $A_1 \geqq A_1^{1+\frac{1}{2^n}}$.

---

(1) 点列 $\{B_n\}$ ニ對シ $\overline{\lim_{n\to\infty}} B_n=\inf_m(\sup_{n\geqq m} B_n)$,

$\lim_{n\to\infty} B_n=\sup_m(\inf_{n\geqq m} B_n)$ ヲ定義スルトキ

$\overline{\lim_{n\to\infty}} B_n=\lim_{n\to\infty} B_n$ ノトキニノミ $\lim_{n\to\infty} B_n$ ト書ク。

依テ $A_1 \leqq A_1 E$. 一方 idempotent トニフコトカラ
$E \leqq I$[1] ガカラ $A_1 \geqq A_1 E$ 即チ $A_1 = A_1 E$.
又 $A(I-E) = A_2 = A_2(I-E)$ ハ以上カラ明カデアルガ
$A_2(I-E) \leqq I-E$ タ云フニハ $A_2 \leqq I$ ヲ云フトヨイガ之ハ
$0 \leqq (I-A_2)^2 = I - 2A_2 + A_2^2 \leqq I - 2A_2^2 + A_2 = I - A_2$ (2)
=ヨリ $A_2^2 \leqq A_2$) カラ明カデアル。

——以 上——

4) 2), 3) ヲ今一度マトメルト $A > 0$ ナルトキ $\lambda > 0$
=對シ

$$E_\lambda = I - \left\{ \lim_m \left[\inf_n \left(\frac{A}{\lambda} \right)^n \right]^{\frac{1}{2^m}} \right\}$$

ト置クトキ

$$E_\lambda^2 = E_\lambda, \quad E_\lambda A = E_\lambda \left(\frac{A}{\lambda}\right) \lambda \leqq \lambda E_\lambda,$$
$$A(I-E_\lambda) = \lambda \left(\frac{A}{\lambda}\right)(I-E_\lambda) \geqq \lambda (I-E_\lambda)$$

5) $\lambda > \mu > 0$ ノトキ $E_\mu \leqq E_\lambda$ 且ツ $E_0 A = 0$,
$E_\infty A = A$. 証明ハ 4) カラ明カ。ヨッテ $\lambda > \mu$ ノトキ
$E_\lambda - E_\mu$ ハ又 idempotent.
何者, $E_\lambda \leqq I$ カラ $E_\lambda E_\mu \leqq E_\mu$ 且ツ $E_\lambda \geqq E_\mu$ =ヨリ
$E_\mu^2 \leqq E_\lambda E_\mu$ ガカラ $E_\lambda E_\mu = E_\mu$ デアル. 斯クシテ

$$(E_\lambda - E_\mu)^2 = E_\lambda - E_\mu \qquad \lambda > \mu$$

---

1) $0 \leqq (I-E)^2 = I - 2E + E^2 = I - E$

$$\boxed{A(E_\infty - E_0) = A}$$

5) $\lambda > \mu > 0$ ノトキ

$$\boxed{\lambda(E_\lambda - E_\mu) \geqq A(E_\lambda - E_\mu) \geqq \mu(E_\lambda - E_\mu)}$$

証明 $A(E_\lambda - E_\mu) = AE_\lambda(E_\lambda - E_\mu) = AE_\lambda(I - E_\mu)$
$\geqq \mu E_\lambda(I - E_\mu) = \mu(E_\lambda - E_\mu)$ (4) ニヨル。)
他ノ半分ノ不等式モ同様ニシテ得ラレル。

7) 5) ニヨリ $E_{\lambda-0} = \sup_{\mu<\lambda} E_\mu$ ナル idempotent
存在シ，$E_\lambda - E_{\lambda-0}$ ハ又 idempotent ナル。実ハ

$$\boxed{E_\lambda = E_{\lambda-0}}$$

証明. 6) カラ $\lambda(E_\lambda - E_{\lambda-0}) = A(E_\lambda - E_{\lambda-0})$. 故ニ
$(E_\lambda - E_{\lambda-0}) = \left(\frac{A}{\lambda}\right)^n (E_\lambda - E_{\lambda-0}) = (I - E_\lambda)(E_\lambda - E_{\lambda-0}) = 0$
(4) ト 5) トニヨル)。

8) spectral theorem $A > 0$, $\mu > 0$ トスル。
0ト μ ノ間ニ $\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots, \lambda_n$ ヲ挿入シ $0 < \lambda_i - \lambda_{i-1} < \varepsilon$ トナラシメル。λ_i' ヲ $\lambda_i \leqq \lambda_i' \leqq \lambda_{i+1}$ トナラシメルト

$$-\varepsilon I \leqq AE_\mu - \sum_i \lambda_i'(E_{\lambda_{i+1}} - E_{\lambda_i}) \leqq \varepsilon I.$$

何者，真中ノ項ハ，$E_\mu = \sum_i (E_{\lambda_{i+1}} - E_{\lambda_i})$ トヲクト，
$(A - \lambda_i')(E_{\lambda_{i+1}} - E_{\lambda_i})$ ナル形ノ項ノ和ガカラ 6) ヲ使

ヘバ

$$\sum_i (\lambda'_i - \lambda_i)(E_{\lambda_{i+1}} - E_{\lambda_i}) \leqq AE_\mu - \sum_i \lambda'_i (E_{\lambda_{i+1}} - E_{\lambda_i})$$

$$\leqq \sum_i (\lambda_{i+1} - \lambda'_i)(E_{\lambda_{i+1}} - E_{\lambda_i}).$$

故ニ $AE_\mu = \int_0^\mu \lambda \, dE_\lambda$

ト書ケル。$\mu \to \infty$ トラシメルト 5) ニヨリ

$$\boxed{A = \int_0^\infty \lambda \, dE_\lambda}$$

斯クシテ 正ノ元 ニ對スル spectral theorem ガデキタタカラ，次カラハ之ヲ用ヒテ operational calculus ヲ取扱ッテミヨウ。

（ツヅク）