



Title	Pythagorian ring 二就テ, II
Author(s)	吉田, 耕作
Citation	全国紙上数学談話会. 1940, 201, p. 306-314
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74805
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

875. Pythagorean ring = 就テ, II

吉田 耕作(阪大)

§1. 前談話 873 / 補正

公理 IV) / 廃棄 深宮政範氏ノ御注意デ H. Freudenthal⁽¹⁾ヲ見テミマス。公理 IV) ハ他ノ諸公理ヨリ導キ出セルヤウデス。ノミナラズ公理 iii)' ハヨリ弱イ公理 iii)" 単調数列 $\{A_n\}$ が上 = (下 =) 押ヘラレテナルナラバ $\sup_n A_n$ ($\inf_n A_n$) が存在スル。

カラ導ケルコトモワカリマス。鬼 = 角 lattice ノ方デハ常識ラシク結局公理 IV) ハ定理或ハ lemma トスベキモノデシタ。

公理群カラノ結果 I) / 証正 $A > 0$ ノ正ノ二乗根 $A^{\frac{1}{2}}$ が

$$A^{\frac{1}{2}} = \sup_C (C > 0, C^2 \leq A)$$

トシタノハ一寸早スギマシタ。之レ右辺ガ環 R ノ要素トシテ存在スルカドウカ未ダワカラナイノデスカラ。併シコノ性質ヲ何ニツカッタカト云フト

$$0 < A < B \text{ ナラ } 0 < A^{\frac{1}{2}} < B^{\frac{1}{2}}$$

ヲ導クノニ使ツタゲデスカラ, 公理群カラ, $0 < A$, $0 < B$ ノトキ

(1) Proc. Amsterdam (1936) 641—651.

$$A^2 < B^2 \quad + \quad A < B$$

ガ云ヘルトヨイ。之ノ証明ハ次ノ如クシテ得ラレル。即チ假定カラ $(B-A)(B+A) > 0$, $B-A = (B-A)_+ - (B-A)_-$ ト置クトキ $(B-A)_- = 0$ + ラ問題ハナイカラ $(B-A)_- > 0$ トシテ矛盾出ス。ソレハ

$$(B-A)_- (B-A)(B+A) = - (B-A)_-^2 (B+A) \geq 0 \text{ カラ}$$

$$(B-A)_-^2 B = 0, \quad (B-A)_-^2 A = 0$$

$$\text{従ツテ } (B-A)_-^2 (B-A) = - (B-A)_-^2 = 0$$

$$\text{即チ } (B-A)_-^3 = 0 \text{ ヲ得ル。}$$

故ニ $(B-A)_-^4 = 0$ トナルカラ 公理 i) ヲ用ヒ $(B-A)_- = 0$ ヲ得ラズ不合理デアル。

公理群カラノ結果 5)ノ補正

$E_0 A = 0, E_\infty A = A$ トシタ所少シ誤謬が必要ダツタ様デス。 E_0 ト書イタノハ実ハ E_{+0} トスベキデ

$$E_{+0} = \inf_{\lambda > 0} E_\lambda, \quad E_\infty = \sup_{\lambda > 0} E_\lambda$$

デアルコト勿論デス。 $E_{+0} A = 0$ ハ $E_\lambda A \leq \lambda E_\lambda$ カラ明カ。又 $E_\infty A = A$ ノミナラズ、実ハ $\underline{E_\infty = I}$ (單位) ガ云ヘルノデス。ソレハ

$$A(I - E_\lambda) \geq \lambda(I - E_\lambda)$$

ヲ使ヘバヨイ。即チ $\frac{A}{\lambda} \geq I - E_\lambda$ ヲ使ツテ $A > 0$ ノトキ

$$\inf_{n \geq 1} \frac{A}{n} = 0$$

ヲ出セレバヨイ。之レハ容易デ $\inf_n \frac{A}{n} = B > 0$ トシ

テ矛盾ヲ出スコト=帰スル。

ソノ証明。 $A \leq nB$ ($n=1, 2, \dots$) カラ $\sup_{n \geq 1} (nB) = C$ が存在スル。 $B > 0$ ナカラ $C - B < C$, 故=充分大キク n ヲトルト $nB \nless C - B$. 即チ $(n+1)B \nless C$ ナル矛盾ヲ得ル。

故= $\lambda \leq 0$ ノトキ $E_\lambda = 0$ トヲクト

正ノ元 A ノ spectral theorem

$$\begin{cases} A = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE_\lambda = \int_0^\infty \lambda dE_\lambda, E_\lambda^2 = E_\lambda \\ E_\infty = I, E_{+0} = 0, E_\lambda \geq E_\mu \ (\lambda \geq \mu) \end{cases}$$

が得ラレテツタ訳デシタ。述べ方が前談話デハ不充分ノ様デス。

§2. 一般元ノ spectral theorem

A ヲ環 R ノ任意ノ元トスルトキ, 正ノ元 $(A+nI)_+$ ($n=1, 2, \dots$) ノ spectral 表現ヲ考ヘル。

$$(A+nI)_+ = \int_0^\infty \lambda dE_\lambda(n),$$

$$E_\lambda(n) = I - \left\{ \lim_m \left[\inf_k \frac{(A+nI)_+^k}{\lambda^k} \right]^{\frac{1}{2^m}} \right\}$$

公理群ヨリノ諸結果 5) = ヨリ $\lambda > \mu > 0$ ナラ

$$\begin{aligned} \mu(E_\lambda(n) - E_\mu(n)) &\leq (A+nI)_+(E_\lambda(n) - E_\mu(n)) \\ &\leq \lambda(E_\lambda(n) - E_\mu(n)) \end{aligned}$$

所が容易 = ワカル如ク $(E_\lambda(n) - E_\mu(n))(A + nI) = 0$
 がカラ上式真中ノ項ハ $(A + nI)(E_\lambda(n) - E_\mu(n))$ ト
 書ケル。故ニ

$$\begin{aligned} (\mu - n)(E_\lambda(n) - E_\mu(n)) &\leq A(E_\lambda(n) - E_\mu(n)) \\ &\leq (\lambda - n)(E_\lambda(n) - E_\mu(n)) \end{aligned}$$

從ツテ

$$E_{\lambda+n}(n) = E_\lambda^{(n)}$$

トヲクト $\lambda > \mu > -n$ トラバ

$$\mu(E_\lambda^{(n)} - E_\mu^{(n)}) \leq A(E_\lambda^{(n)} - E_\mu^{(n)}) \leq \lambda(E_\lambda^{(n)} - E_\mu^{(n)})$$

故ニ $\widetilde{E}_\lambda = \sup_{n \geq 1} E_\lambda^{(n)}$

トヲケバ $\widetilde{E}_\lambda$ ハ $+\infty > \lambda > -\infty$ デ定義サレ且ツ

$$\widetilde{E}_\lambda^2 = \widetilde{E}_\lambda, \quad \lambda(I - \widetilde{E}_\lambda) \leq (I - \widetilde{E}_\lambda)A,$$

$$\widetilde{E}_\lambda A \leq \lambda \widetilde{E}_\lambda$$

が成立スルコトガワカル。之レカラ $\widetilde{E}_\lambda$ が A ノ spectral
 表現ヲ與ヘルコトハ 公理群カラノ結果 8) ト同様ニシ
 テワカル:

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda d\widetilde{E}_\lambda.$$

§3. 環 R ノ“函数環トシテノ具体的表現”

R , idempotent 元 A ($A^2 = A$) , 全体 $\mathbb{I}$ 7

若へル。 $\mathcal{I}$ ハ

(1) 単位 I ト 0 ヲ含ム。

(2) $A, B \in \mathcal{I}$ ナラバ $A \vee B = A + B - AB$,
 $A \wedge B = AB \in \mathcal{I}$.

(2)' 公理 iii)' = ヨリ lattice トシテノ和 $\vee$, 積 $\wedge$
= 関シテ $\mathcal{I}$ ハ可附番個マデノ和, 積ガ許サレテアル。

(3) スクシテ $\mathcal{I}$ ハ "distributive lattice" ナ
アルガ, 尚 "complemented" ナアル。即チ $A \in \mathcal{I}$
ナラバ $I - A \in \mathcal{I}$.

(4) $A, B \in \mathcal{I}$ 且ツ $A \neq B$ ナラバ $A \wedge C = 0$.
 $B \wedge C \neq 0$ ナル如キ $C \in \mathcal{I}$ 存在ス ($C = A \wedge (I - A)$
ヲトレ)。

以上ノ性質ヲ使フト Stone-Wallman 流⁽¹⁾ = $\mathcal{I}$
ノ点集合トシテノ表現ガ出来ル。以下ニソレヲ述ベ
ヨウ。

divisorless additive ideal of $\mathcal{I}$ $\mathcal{I}$,
部分集合 $\mathcal{O}$ ガ i) $A, B \in \mathcal{O}$ ナラ $A \wedge B \in \mathcal{O}$ ii) $A \in \mathcal{O}$
ナラ $A < B$ ($A \wedge B = A$ ノコト) ナル如キ B 全テ $\in \mathcal{O}$ ナ
ルトキ $\mathcal{O}$ ヲ "additive ideal of $\mathcal{I}$ " ト呼ブ。
divisorless ト云フノハ $\mathcal{O}$ ヲ部分集合トシテ含ム
additive ideal ハ $\mathcal{I}$ 自身ニ限ルコトアル。

(1) Ann. of Math. 39(1938), 112-126.

Bicompact space $\mathcal{T}$ $\mathcal{T}$ の d, a, i .

の $\mathcal{T}$ “点” トスル空間 $\mathcal{T}$ を考へル。コノ点 α ト記
ソフ。 α ノ元 α ナル点ノ “坐標” ト呼ブ。 $\mathcal{T}$ ノ元 A
= 對シテハ其ノ坐標ノ一ツガ A デアル如キ $\mathcal{T}$ ノ点全体 $\tilde{A}$
ヲ對應サセル。 $\tilde{A}$ ノ如キ $\mathcal{T}$ ノ点集合及ビ斯ルモ、
積集合 $\mathcal{T}$ ノ “閉集合” ト名ツケルト $\mathcal{T}$ ハ Bicompact
+ T_1 -space (一点ガ閉集合 = ナルコト) = ナル。

— Wallman — (1), (2), (3) カラ出テクル。

空間 $\mathcal{T}$ ノ性質 1 尚 (4) を使へバ $\mathcal{T}$ ノ点 A ト
 $\mathcal{T}$ ノ特別ナ点集合 $\tilde{A}$ ト對應ハ $1 - \alpha - 1 = + \text{ル}$ —
Wallman

空間 $\mathcal{T}$ ノ性質 2 上カラ $\tilde{A}$ ノ如キ点集合ガ $\mathcal{T}$
ノ閉集合ノ base = ナツテルワケデアルガ、(3) を使へバ
各 $\tilde{A}$ ノ閉集合 = モナツテアル。即チ吾々ノ場合ハ $\{\tilde{A}\}$
ハ bicompact space $\mathcal{T}$ ノ closed base 且
ツ open base デアル。

$\{\tilde{A}\}$ ノ性質 1 (1), (2), (3) を使へバ $\mathcal{T}$ ノ点
集合トシテノ和 $\tilde{A} + \tilde{B}$, 積 $\tilde{A} \tilde{B}$ ハ夫々 $(\tilde{A} \vee \tilde{B}), (\tilde{A} \wedge \tilde{B})$
デアル。即チ上述ト合セテ對應 $A \rightarrow \tilde{A}$ ハ lattice iso-
morphic デアル — Wallman.

$\{\tilde{A}\}$ ノ性質 2 $\mathcal{T}$ ハ complete additive,
complete multiplicative デアル。之ガ $\{\tilde{A}\}$
= ドウ反映スルカ。 $A_1 < A_2 < \dots$ 且ツ

$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \sum_{i=1}^{\infty} A_i = A$ とスレバ和集合 $\sum_{i=1}^{\infty} \tilde{A}_i \subseteq \tilde{A}$ の明

カデアルが實ハ $\tilde{A} - \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{A}_i$ ハ non-dense ナル。

証明 上述カラ之ノ集合ハ $\tilde{\mathcal{I}}$ ノ閉集合ナコトハ明
カカカラ之レガ閉集合ヲ含マスコト, 特ニ如何ナル $\tilde{B}$
ヲモ含マスコトヲ云ヘバヨイ。所ガモシ $\tilde{B}$ ヲ含ムトスレ
バ, 上ノ isomorphic カラ $A \supset B$ 且ツ $B \wedge A_i = 0$
($i = 1, 2, \dots$) トナリ $A = \lim_{i \rightarrow \infty} A_i$ ナスル。

— 以上 —

故ニ $\{\tilde{A}\}$ ハ $\tilde{\mathcal{I}}$ ノ “第一類集合” ナリ常ニ無視スルコト
ニスルト complete additive 且ツ complete
multiplicative ナル。

例ノ可測函數環トシテノ表現 ハモハヤ誤ハナ
イ。 $A \in \mathcal{R}$ ノ spectral 表現 $A = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE_{\lambda}$ カラ
($-\infty, \infty$) ヲ $\frac{1}{n}$ -net ナル $\tilde{\mathcal{I}}$ ノ集合 $(\widetilde{E_{\lambda_i} - E_{\lambda_{i-1}}})$
デ λ_i ナル如キ階段函數, $n \rightarrow \infty$ ノトキノ極限ト
シテ得ラレル函數 $f_A(t)$ on $\tilde{\mathcal{I}}$ ヲ A ニ對應サセルト
ヨイ。即チ

$\mathcal{R}$ ノ各要素 A ハ $\tilde{\mathcal{I}}$ ノ上デ第一類ノ集合ヲ除キ到
ル所有限且ツ “可測” —— 函數 $f_A(t)$ ガ $f_A(t) \leq \lambda$
ナル如キ $t \in \tilde{\mathcal{I}}$ ノ集合ガ $\tilde{B}$ ノ如キモノト (高々第一類ノ
集合ヲ除キ一致スルコト) —— ナ函數 $f_A(t)$ デ表現サ

レル。然モ

$$\begin{cases} A \rightarrow f_A(t), B \rightarrow f_B(t) \text{ トラバ} \\ A+B \rightarrow f_A(t)+f_B(t), AB \rightarrow f_A(t)f_B(t), \\ A \geq B \leftrightarrow f_A(t) \geq f_B(t) \text{ (1)} \end{cases}$$

トルコトハ容易ニ示サレル。

逆ニ其ル可測函数 $f(t)$ ヲ任意ニトルト之レガ或ル $A \in \mathcal{R}$ カラ $f_A(t)$ トシテ得ラレルコトヲ云フニハ今一ツ公理ヲ導入シトケバヨロシイ。即チ

公理 (V) $\mathcal{R}$ ノ可附番個ノ要素 A_i ガ $\inf(A_i, A_j) = 0$ ($i \neq j$) ヲ満足スレバ

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{R}.$$

上ノ公理ガアレバ $f(t)$ ヲ階段函数ヲ近似シタモノノ原像ガ $\mathcal{R}$ = アルコトカラ A ガ $f_A(t) = f(t)$ ナル如ク定ルノデアアル。

[注意] von Neumann, M. H. Stone 等ノ代数的取扱ヒデハ有界函数シカ出ラコナイ。上ノ如クヤレバ可測函数ガアレタリ。勿論公理ガ以テイカラ measure ハ入ラナイケレドモ。(2) 確率論 ハ可測函数ノ空間ヲ扱フ analysis ナリ。又カラ上ノ結果カラ確率論ノ algebraic-analytic ナ取扱ヒヲスル望ミガ

(1) 第一類ノ集合ヲ除キ。

(2) measure ヲ入レルコトハ metric ナ axiom ヲ入レルコトニヨリタヤスク出来ル。

アル様＝思ハレル。