OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	Pythagorian ring 二就テ, II
Author(s)	吉田, 耕作
Citation	全国紙上数学談話会. 1940, 201, p. 306-314
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74805
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

875. Pythagorian ring ニ就テ, II

吉田 耕作(阪大)

§1. 前談話873ノ補正

公理iv)ノ廃棄 深宮氏ノ御注意デ H. Freudenthal[1] ヲ見テミマスト公理iv)ハ他ノ諸公理ヨリ導キ出セルヤウデス。ノミナラズ公理iii)′ハヨリ弱イ

公理iii)″ 単調点列 $\{A_n\}$ が上ニ(下ニ)押ヘテレテヲルナラバ $\sup_n A_n$ ($\inf_n A_n$) が存在スル。

カラ導ケルコトモワカリマス。兎ニ角 lattice ノ方デハ常識ラシク結局公理iv)ハ定理或ニハ lemma トスベキモノデシタ。

公理群カラノ結果1)ノ証正 $A>0$ ノ正ノ二乗根 $A^{\frac{1}{2}}$ ガ

$$A^{\frac{1}{2}} = \sup_C (C>0,\ C^2 \leqq A)$$

トシタノハ一寸早スギマシタ。之レ右辺ガ環 R ノ要素トシテ存在スルカドウカ未ダワカラナイノデスカラ。併シコノ性質ヲ何ニツカッタカト云フト

$$0<A<B \text{ ナラ } 0<A^{\frac{1}{2}}<B^{\frac{1}{2}}$$

ヲ導クノニ使ッタダケデスカラ，公理群カラ。$0<A$, $0<B$ ノトキ

---

(1) Proc. Amsterdam (1936) 641—651.

$A^2 < B^2$ ナラ　$A < B$

ガ云ヘルトヨイ。之ノ証明ハ次ノ如クシテ得ラレル。即チ假定カラ $(B-A)(B+A) > 0$. $B-A = (B-A)_+ - (B-A)_-$ ト置クトキ $(B-A)_- = 0$ ナラ問題ハナイカラ $(B-A)_- > 0$ トシテ矛盾出ス。ソレニハ

$(B-A)_-(B-A)(B+A) = -(B-A)_-^2(B+A) \geqq 0$ カラ

$(B-A)_-^2 B = 0$, $(B-A)_-^2 A = 0$

從ッテ $(B-A)_-^2(B-A) = -(B-A)_-^3 = 0$

即チ $(B-A)_-^3 = 0$ ヲ得ル。

故ニ $(B-A)_-^4 = 0$ トナルカラ公理 i) ヲ用ヒ $(B-A)_- = 0$ ヲ得ラ不合理デアル。

公理群カラノ結果5)ノ補正　$E_0 A = 0$, $E_\infty A = A$ トシタ所少シ註訳ガ必要ダッタ様デス。E_0 ト書イタノハ実ハ E_{+0} トスベキデ

$$E_{+0} = \inf_{\lambda > 0} E_\lambda, \qquad E_\infty = \sup_{\lambda > 0} E_\lambda$$

デアルコト勿論デス。$E_{+0} A = 0$ ハ $E_\lambda A \leqq \lambda E_\lambda$ カラ明カ。又 $E_\infty A = A$ ノミナラズ、実ハ $E_\infty = I$（單位）ガ云ヘルノデス。ソレハ

$$A(I - E_\lambda) \geqq \lambda (I - E_\lambda)$$

ヲ使ヘバヨイ。即チ $\frac{A}{\lambda} \geqq I - E_\lambda$ ヲ使ッテ $A > 0$ ノトキ

$$\inf_{n \geqq 1} \frac{A}{n} = 0$$

ヲ出セレバヨイ。之レハ容易デ $\inf \frac{A}{n} = B > 0$ トシ

テ矛盾ヲ出スコトニ帰スル。

ソノ証明。 $A \geqq nB$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ カラ $\sup_{n\geqq 1}(nB) = C$ ガ存在スル。$B>0$ ダカラ $C-B<C$, 故ニ充分大キク n ヲトルト $nB \leqq C-B$. 即チ $(n+1)B \leqq C$ ナル矛盾ヲ得ル。

故ニ $\lambda \leqq 0$ ノトキ $E_\lambda = 0$ トヲクト

> 正ノ元 A ノ spectral theorem
>
> $$\begin{cases} A=\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda\, dE_\lambda = \int_0^{\infty} \lambda\, dE_\lambda, \quad E_\lambda^2 = E_\lambda \\ E_\infty = I, \quad E_{+0} = 0, \quad E_\lambda \geqq E_\mu \ (\lambda \geqq \mu) \end{cases}$$

ガ得ラレテヲッタ訳デシタ。述べ方が前談話デハ不充分ノ様デス。

§2. 一般元ノ spectral theorem

A ヲ環 R ノ任意ノ元トスルトキ, 正ノ元 $(A+nI)_+$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ ノ spectral 表現ヲ考ヘル。

$$(A+nI)_+ = \int_0^{\infty} \lambda\, dE_\lambda(n),$$

$$E_\lambda(n) = I - \left\{ \lim_m \left[\inf_k \frac{(A+nI)_+^k}{\lambda^k} \right]^{\frac{1}{2^m}} \right\}$$

公理群ヨリノ諸結果 5) ヨリ $\lambda > \mu > 0$ トラ

$$\mu\left(E_\lambda(n) - E_\mu(n)\right) \leqq (A+nI)_+\left(E_\lambda(n) - E_\mu(n)\right) \leqq \lambda\left(E_\lambda(n) - E_\mu(n)\right)$$

所が容易＝ワカル如ク $(E_\lambda(n)-E_\mu(n))(A+nI)_-=0$
ダカラ上式眞中ノ項ハ $(A+nI)(E_\lambda(n)-E_\mu(n))$ ト
書ケル。故＝

$$(\mu-n)(E_\lambda(n)-E_\mu(n)) \leqq A(E_\lambda(n)-E_\mu(n)) \leqq (\lambda-n)(E_\lambda(n)-E_\mu(n))$$

縦ツテ

$$E_{\lambda+n}(n)=E_\lambda^{(n)}$$

トヲクト $\lambda>\mu>-n$ ナラバ

$$\mu(E_\lambda^{(n)}-E_\mu^{(n)}) \leqq A(E_\lambda^{(n)}-E_\mu^{(n)}) \leqq \lambda(E_\lambda^{(n)}-E_\mu^{(n)})$$

故＝ $\widetilde{E}_\lambda=\sup_{n\geqq 1} E_\lambda^{(n)}$

トヲケバ $\widetilde{E}_\lambda$ ハ $+\infty>\lambda>-\infty$ デ定義サレ且ツ

$$\widetilde{E}_\lambda^2=\widetilde{E}_\lambda,\quad \lambda(I-\widetilde{E}_\lambda)\leqq(I-\widetilde{E}_\lambda)A,$$

$$\widetilde{E}_\lambda A\leqq\lambda\widetilde{E}_\lambda$$

ガ成立スルコトガワカル。之レカラ $\widetilde{E}_\lambda$ ガ A ノ spectral 表現ヲ與ヘルコトハ［公理群カラノ結果 8)］ト同様ニシテワカル：

$$A=\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda\,d\widetilde{E}_\lambda.$$

§3. 環 R ノ"函數環トシテノ具体的表現"

R ノ idempotent 元 A ($A^2=A$) ノ全体ヲ

券ヘル。$\mathfrak{J}$ ハ

(1) 單位 I トヲ含ム。

(2) $A, B \in \mathfrak{J}$ ナラバ $A \vee B = A + B - AB$,

$A \wedge B = AB \in \mathfrak{J}$.

(2)′ 公理 iii)′ ニヨリ lattice トシテノ和 $\vee$, 積 $\wedge$ ニ関シテ $\mathfrak{J}$ ハ可附番個マデノ和, 積が許サレテヲル。

(3) 斯クシテ $\mathfrak{J}$ ハ "distributive lattice" デアルガ, 尚 "complemented" デアル。即チ $A \in \mathfrak{J}$ ナラバ $I - A \in \mathfrak{J}$.

(4) $A, B \in \mathfrak{J}$ 且ツ $A \neq B$ ナラバ $A \wedge C = 0$, $B \wedge C \neq 0$ ナル如キ $C \in \mathfrak{J}$ 存在ス ($C = A \wedge (I - B)$ ヲトレ)。

以上ノ性質ヲ使フト Stone-Wallman 流[1] ニ $\mathfrak{J}$ ノ怎様ナ集合トシテノ表現ガ出來ル。以下ニソレヲ述ベヨウ。

divisorless additive ideal of $\mathfrak{J}$ $\mathfrak{J}$ ノ部分集合 $\mathfrak{o}$ ガ i) $A, B \in \mathfrak{o}$ ナラ $A \wedge B \in \mathfrak{o}$ ii) $A \in \mathfrak{o}$ ナラ $A < B$ ($A \wedge B = A$ ノコト) ナル如キ B 全テ $\in \mathfrak{o}$ ナルトキ $\mathfrak{o}$ ヲ "additive ideal of $\mathfrak{J}$" ト呼ブ。divisorless トイフノハ $\mathfrak{o}$ ヲ部分集合トシテ含ム additive ideal ハ $\mathfrak{J}$ 自身ニ限ルコトデアル。

---

(1) Ann. of Math. 39 (1938), 112–126.

Bicompact space $\mathfrak{T}$ $\mathfrak{J}$ ノ d.a.i. ノ元ヲ"点"トスル空間 $\mathfrak{T}$ ヲ考ヘル。コノ点ヲ $\tilde{\alpha}$ ト記ソシ。α ノ元ヲ $\tilde{\alpha}$ ナル点ノ"坐標"ト呼ブ。$\mathfrak{J}$ ノ元 A ニ對シテハ其ノ坐標ノ一ツガ A デアル如キ $\mathfrak{T}$ ノ点全体 $\tilde{A}$ ヲ對應サセル。$\tilde{A}$ ノ如キ $\mathfrak{T}$ ノ点集合及ビ斯ルモノノ積集合ヲ $\mathfrak{T}$ ノ"閉集合"ト名ヅケルト $\mathfrak{T}$ ハ Bicompact + T_1-space (一点ガ閉集合=ナルコト) =ナル。
— Wallman — (1), (2), (3) カラ出テクル。

空間 $\mathfrak{T}$ ノ性質1. 尚 (4) ヲ使ヘバ $\mathfrak{J}$ ノ点 A ト $\mathfrak{T}$ ノ特別ナ点集合 $\tilde{A}$ トノ對應ハ 1-to-1 = ナル— Wallman

空間 $\mathfrak{T}$ ノ性質2 上カラ $\tilde{A}$ ノ如キ点集合ガ $\mathfrak{T}$ ノ開集合ノ base = ナッテルワケデアルガ, (3) ヲ使ヘバ各 $\tilde{A}$ ハ開集合ニモナッテヲル。即チ吾々ノ場合ハ $\{\tilde{A}\}$ ハ bicompact space $\mathfrak{T}$ ノ closed base 且ツ open base デアル。

$\{\tilde{A}\}$ ノ性質1 (1), (2), (3) ヲ使ヘバ $\mathfrak{T}$ ノ点集合トシテノ和 $\tilde{A}+\tilde{B}$, 積 $\tilde{A}\tilde{B}$ ハ夫々 $(\widetilde{A\vee B})$, $(\widetilde{A\wedge B})$ デアル。即チ上述ト合セテ對應 $A\to\tilde{A}$ ハ lattice isomorphic デアル — Wallman.

$\{\tilde{A}\}$ ノ性質2 $\mathfrak{J}$ ハ complete additive, complete multiplicative デアル。之ガ $\{\tilde{A}\}$ ニドウ反映スルカ。$A_1 < A_2 < \cdots\cdots$ 且ツ

$\lim_{n\to\infty} A_n = \sum_{i=1}^{\infty} A_i = A$トスレバ和集合 $\sum_{i=1}^{\infty} \widetilde{A}_i \subseteq \widetilde{A}$ ハ明カデアルガ寧ロ $\widetilde{A} - \sum_{i=1}^{\infty} \widetilde{A}_i$ ハ non-dense ナル。

証明　上述カラ之ノ集合ガ $\widetilde{\mathfrak{I}}$ ノ開集合ナコトハ明カダカラ之レガ開集合ヲ含マヌコト，特ニ如何ナル $\widetilde{B}$ ヲモ含マヌコトヲ云ヘバヨイ。所ガモシ $\widetilde{B}$ ヲ含ムトスレバ，上ノ isomorphie カラ $A > B$ 且ツ $B \wedge A_i = 0$ $(i = 1, 2, \cdots\cdots)$ トナリ $A = \lim_{i\to\infty} A_i$ ニ反スル。

— 以上 —

故ニ $\{\widetilde{A}\}$ ハ $\widetilde{\mathfrak{I}}$ ノ"第一類集合"ヲ常ニ無視スルコトニスルト complete additive 且ツ complete multiplicative ナル。

此ノ可測函数環トシテノ表現ハモハヤ訳ハナイ。$A \in R$ ノ spectral 表現 $A = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE_\lambda$ カラ $(-\infty, \infty)$ ヲ $\frac{1}{n}$-net ニ分ケテ $\widetilde{\mathfrak{I}}$ ノ集合 $(\widetilde{E_{\lambda_i} - E_{\lambda_{i-1}}})$ デ入ニ ナル如キ階段函数ノ $n \to \infty$ ノトキノ極限トシテ得ラレル函数 $f_A(t)$ on $\widetilde{\mathfrak{I}}$ ヲ A ニ對應サセルトヨイ。即チ

R ノ各要素 A ハ $\widetilde{\mathfrak{I}}$ ノ上デ第一類ノ集合ヲ除キ到ル所有限且ツ"可測"——函数 $f_A(t)$ ガ $f_A(t) \leqq$ 入ナル如キ $\lambda \in \widetilde{\mathfrak{I}}$ ノ集合ガ $\widetilde{B}$ ノ如キモノト（高々第一類ノ集合ヲ除キ一致スルコト——ナ函数 $f_A(t)$ デ表現サ

レル。然モ

$$\begin{cases} A \to f_A(t), \quad B \to f_B(t) \text{ トラベ} \\ A+B \to f_A(t)+f_B(t), \quad AB \to f_A(t)\, f_B(t), \\ A \cong B \longleftrightarrow f_A(t) \cong f_B(t)^{(1)} \end{cases}$$

ナルコトハ容易ニ示サレル。

逆ニ斯ル可測函数 $f(t)$ ヲ任意ニトルトキレガ或ル $A \in R$ カラ $f_A(t)$ トシテ得ラレルコトヲ云フニハ今一ツ公理ヲ導入シトケベヨロシイ。即チ

公理(IV) R ノ可附番個ノ要素 A_i が $\inf(A_i, A_j) = 0$ $(i \neq j)$ ヲ満足スレバ

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_i \in R.$$

上ノ公理ガアレバ $f(t)$ ヲ階段函数デ近似シタモノノ原像ガ R ニアルコトカラ A ガ $f_A(t) = f(t)$ ナル如ク定ルノデアル。

〔注意〕 von Neumann, M. H. Stone 等ノ代数的取扱ヒデハ有界函数シカ出ラレナイ。上ノ如クシテハ可測函数ガデテクル。勿論公理ガ少ナイカラ measure ハ入ラナイケレドモ。(2) 確率論ハ可測函数ノ空間ヲ扱フ analysis ナノダカラ上ノ結果カラ確率論ノ algebraic-analytic ナ取扱ヒラスル望ミガ

---

(1) 唯一類ノ集合ヲ除キ。

(2) measure ヲ入レルコトハ metric ナ axiom ヲ入レルコトニヨリ多ク出来ル。

アル様ニ思ハレル。