



Title	Stable distribution ヲモツ Markoff Process
Author(s)	深宮, 政範
Citation	全国紙上数学談話会. 1940, 201, p. 314-319
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74806
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

876. Stable distribution $\gamma \in \mathbb{V}$ Markoff Process.

深宮 政範 (阪大)

R は "measurable" な集合とし, $\mathbb{V}$ は R の
"measurable" な subsets, Borel family
を $B(R)$ とする。今 X が Simple Markoff
Process = γ ずつ unit time, 後 $E \in B(R)$ =
移行する transition probability を $P(X, E)$
で表はす、茲で次のことを假定する。

1) X を fix したとき, $P(X, E)$ は $E \in B(R)$ =
関して complete additive

2) E を fix した時, $P(X, E)$ は "measurable"
なり

$$P^{(1)}(x, E) = P(x, E), \quad P^{(n)}(x, E) = \int_R P^{(n-1)}(x, dy) P(y, E)$$

と定まる。茲に $P^{(n)}(x, E) \geq 0, \quad P^{(n)}(x, R) \equiv 1$

次に $B(R)$ で定義された non-negative set-function
 $\mathcal{P}(E)$ が與へられて

1) $\varphi(E)$ is complete additive for $E \in B(R)$,
 $\varphi(R) = 1$.

2) $\int_R \varphi(dx) P(x, E) = \varphi(E)$ for any $E \in B(R)$

3) $B(R)$ is separable

トスル。此ノトキ吉田氏ニ従ヘバ, Markoff Process
 $P(x, E)$ is stable distribution $\varphi(E)$ ノモツト
 云フ。

吉田氏⁽¹⁾ハ此ノ Markoff Process = ヲイテ,
 ノノ重要ナルコト及ビ基礎定理 (Ergodic theorem,
 下参照)

ヲ論ゼラレ, 又角谷氏モ之ヲ研究サレタ。

吉田氏ノ証明サレタ定理ハ L^1 mean ergodic
 theorem デ, 之ハ次ノ様ニ述ベラレル。

Theorem. A 若シ $\int_R |f(x)| \varphi(dx) < \infty$ ナラバ

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_R \left| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N f_n(x) - f^*(x) \right| \varphi(dx) = 0$$

ナル如キ $f^*(x) \in L^1_\varphi$ ガ存在スル。且シ

$$f_n(x) = \int_R P^{(n-1)}(x, dy) f(y), \quad f_1(x) = f(x)$$

$$n = 2, 3, 4, \dots$$

之ニ就イテハ $|f(x)| \leq M$ (for all x) ナラバ

$\{f_n(x)\}$ is uniformly integrable ナルコトハ

(1) 學士院紀要, XVI (1940), No. 3 Paper 12°.

直ぐニ分ルデセウ。

角谷氏ノ証明サレタ定理ハ *almost everywhere*
ノ意味、(Birkoff 型) *ergodic theorem*、
ーツデ

Theorem. B 凡テ、 X ニ對シテ $|f(x)| \leq M$ ナル M ガ
アレバ $\mathcal{G}$ -measure 0ノ集合ヲ外ニテ

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_n(x) = f^*(x)$$

ハ存在シテ $f^*(x) \in L_{\mathcal{G}}$

勿論 *stable distribution* $\mathcal{G}(E)$ ヲモツ

Markoff Process $P(x, E)$ ガドンナ條件ヲ満足ス
ルトキ $L_{\mathcal{G}}$ デ $\mathcal{G}$ -almost everywhere, *Ergodic*
*Theorem*ガ成立スルカガ分ルコトガ尤モ望マシイノ
デアル(大い Banach space, operatorsニ
就イテ, *ergodic theorem*デ operatorニ
ケ條件ヲ附シタ吉田, 角谷兩氏ノ定理ガ一般デアツキ)
茲デハ夫レニ立入ラズニ定理Bカ“有界”デナイ場合デ
モ成立スルコトヲ注意シタイ。簡単ノタメ角谷君ノ論文ノ記
号ヲソノマデニ借用スル。

1°. Infinite Product Space $R^* = (\overset{(-1)}{\dots}, \overset{(10)}{R}, \overset{(1)}{R}, R, \dots) =$

$$\mathcal{G}^*(E^*) = \int_{E_m} \int_{E_{m+1}} \dots \int_{E_n} \mathcal{G}(dt_m) P(t_m, dt_{m+1}) P(t_{m+1}, dt_{m+2})$$

$$\dots P(t_{n-1}, dt_n),$$

$$E^* = (\dots R, R, E_m, E_{m+1}, \dots, E_n, R, R, \dots),$$

$$-\infty < m \leq n < \infty$$

=依って measure を附与, 又別 =

$$\varphi_{t_0}^*(E^*) = \int_{E_m} \int_{E_{m+1}} \cdots \int_{E_n} P^{(m)}(t_0, dt_m) P(t_m, dt_{m+1}) \cdots \\ \cdots P(t_{n-1}, dt_n)$$

$$\text{但し } E^* = (\cdots R, E_m, E_{m+1}, \cdots, E_n, R, \cdots),$$

$$1 \leq m \leq n$$

ヲ考へルコト = スル, 然ルトキハ $R^*(\varphi^*(E^*))$ デハ

$\mathbb{P} t^* = t^{*'}, t^* = (t_i^{(i)}), t^{*'} = (t_{i+1}^{(i)})$ ハ $\text{measure}(\varphi^*)$

preserving + 変換ト+ ッテ茲 = Wiener /

Ergodic Theorem が成立ツコト及ビ $f(t^*) \geq 0$,

$$\int f(t^*) \varphi^*(dt^*) < \infty \text{ + 之ハ } \varphi\text{-measure } 0 \text{ 上 } t_0\text{-}$$

$$\text{集合ヲ除キ } \int \varphi_{t_0}^*(dt^*) f(t^*) < \infty \text{ デアルコトノニツ}$$

ノ点カラコノ定理が次ノ假定ノ下デ成立ツマウデア

ル。

$$\int |f(t_0)|^p \varphi(dt_0) < \infty \quad (p > 1)$$

$$\text{又ハ } \int |f(t_0)| \log^+ |f(t_0)| \varphi(dt_0) < \infty$$

御断り

此ノ注意ハ既ニ吉田, 角谷両氏が知ツテ居ラレタ

ノデアッテ, 小生ハ夫レヲ知らズ = 考ヘマシタノデ此ノ点オ

断リ致シマス。

$$1^\circ. f^*(t^*) = f(t_0), t_0 = t_0(t^*) \text{ たらバ}$$

$$\left(\max_{1 \leq k \leq N} \frac{1}{k} \sum_{n=1}^k f(t_n) > \alpha \right) \text{ たら } t^* \text{-集合, measure}$$

$$(\mathcal{G}^*) \wedge \left\langle \frac{2}{\alpha} \int_{|f^*(t^*)| > \frac{\alpha}{2}} |f^*(t^*)| \mathcal{G}^*(dt^*) \right.$$

$$f^*(t^*) = f(t_0), E_{t^*}(\mathcal{V} < f^*(t^*) < S) = E_{t^*}(\mathcal{V} < f(t_0) < S, t_0 = t_0(t^*))$$

$$\wedge E_{t_0}(\mathcal{V} < f(t_0) < S) = F \text{ たらバ}$$

$$E_{t^*}(\mathcal{V} < f^*(t^*) < S) = E_{t^*}(t_0(t^*) \in F)$$

$$\text{従ッテ, } \mathcal{G}^* \text{-measure } \wedge = \int_F \mathcal{G}(dt_0) = \mathcal{G}(F)$$

$$\therefore \frac{2}{\alpha} \int_{|f^*(t^*)| > \frac{\alpha}{2}} |f^*(t^*)| \mathcal{G}^*(dt^*)$$

$$= \frac{2}{\alpha} \int_{|f(t_0)| > \frac{\alpha}{2}} |f(t_0)| \mathcal{G}(dt_0)$$

$$2^\circ. \varepsilon \forall \int |f(t_0)| \log^+ |f(t_0)| \mathcal{G}(dt_0) < \infty \text{ たらバ}$$

$$\text{l.u.b.}_n \left| \frac{1}{n} \sum_{n=1}^n f(t_n) \right| = \bar{f}(t^*),$$

$$\text{カ } \mathcal{G}^* \text{-measure } 0, \text{ 集合ヲ外イテ有限テ } \int \bar{f}(t^*) \mathcal{G}(dt^*) < \infty$$

$$3^\circ. f^*(t^*) \geq 0, \int f^*(t^*) \mathcal{G}^*(dt^*) < \infty \text{ たらバ}$$

殆ど凡て (φ) , $t_0 = \text{定数}$

$$\int f^*(t^*) \varphi_{t_0}(dt^*) < \infty,$$

$3^\circ = \exists \varphi \neq 2^\circ$ 於ける $\bar{f}(t^*) \wedge \varphi_{t_0}(dt^*) \neq$
integrable なるものあり

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \int_{\mathbb{R}^k} f(t_m) \varphi_{t_0}(dt^*) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \int p^{(n)}(t_0, t_m) f(t_m) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n f_m(t_0) = \text{exists} \end{aligned}$$