OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	Algebra二於ケル Arithmetik ニツイテ
Author(s)	浅野, 啓三
Citation	全国紙上数学談話会. 1940, 202, p. 324-335
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74808
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

878. Algebra ニ於ケル Arithmetik ニツイテ

浅野 啓三 (阪大)

Speiser, Brandt, Artin, Hasse 等ニヨル Algebra ニ於ケル整数論が公理的ニ基礎付ケラレルコトハ小生ノ一論文[1]デ論ジマシタ．ハジメニ先ヅ其ノ大要ヲ述ベ，次ニコレニ関聯スル一問題ニツイテ考察シタイト思ヒマス。

§1.

γ ヲ Eins 1 ヲ有スル Schiefring トスル．乗法ニ関シ逆ヲ有スル γ ノ元ヲ正規元ト呼ブ。

Def. γ ノ Teilring $\mathfrak{O}$ ガ 1 ヲ含ミ，且ツ γ ノ任意ノ元 x ニ対シ，

$$\mathfrak{O}x\mathfrak{O}\alpha\subseteq\mathfrak{O},\quad \beta\mathfrak{O}x\mathfrak{O}\subseteq\mathfrak{O}$$

トナル様ナ $\mathfrak{O}$ ニ属スル正規元 α,β ガ存在スルトキ，$\mathfrak{O}$ ヲ γ ノ Ordnung トイフ。

$\mathfrak{O}$ ヲ γ ノ Ordnung トシ，$\mathfrak{M}$ ヲ γ ノ Teilmenge トスルトキ，入 $\mathfrak{M}\mu\subseteq\mathfrak{O}$ トナル正規元入，μ ガアレバ，$\alpha\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{O}$, $\mathfrak{M}\beta\subseteq\mathfrak{O}$ トナル $\mathfrak{O}$ ニ属スル正規元 α,β ガ存在スル。

---

(1) K. Asano, Arithmetische Idealtheorie in nichtkommutativen Ringen. 掲報 16 (1939)

Def. $\mathfrak{o}, \mathfrak{o}'$ ヲ γ ノ Teilmodul トスルトキ,

$$\lambda \mathfrak{o} \mu \subseteq \mathfrak{o}', \quad \lambda' \mathfrak{o}' \mu' \subseteq \mathfrak{o}$$

トナル如キ正規元 $\lambda, \mu, \lambda', \mu'$ ガ存在スルナラバ, $\mathfrak{o}$ ト $\mathfrak{o}'$ ハ äquivalent デアルト云フ。

1 ヲ含ム γ ノ Teilring $\mathfrak{O}'$ ガ Ordnung $\mathfrak{O}$ ト äquivalent ナラバ $\mathfrak{O}'$ ハ γ ノ Ordnung ニナル. $\mathfrak{O}'$ ヲ $\mathfrak{O}$ ト äquivalent ナ Ordnung ト云フ。

Def. Ordnung $\mathfrak{O}$ ガソレト äquivalent ナ他ノ如何ナル Ordnung ニモ含マレナイトキ, $\mathfrak{O}$ ヲ Maximalordnung ト云フ。

Def. $\mathfrak{O}$ ヲ Ordnung トスル. γ ニ含マレル $\mathfrak{O}$-Rechtsmodul ($\mathfrak{O}$-Linksmodul) $\mathfrak{o}$ ガ $\mathfrak{O}$ ト äquivalent ナルトキ, 即チ

$$\lambda \mathfrak{o} \mu \subseteq \mathfrak{O}, \quad \alpha \in \mathfrak{o}$$

ナル如キ正規元 λ, μ, α ガ存在スルトキ, $\mathfrak{o}$ ノコトヲ $\mathfrak{O}$-Rechtsideal ($\mathfrak{O}$-Linksideal) ト云フ。$\mathfrak{o}$ ガ同時ニ $\mathfrak{O}$-Rechtsideal 且ツ $\mathfrak{O}$-Linksideal ナルトキ $\mathfrak{o}$ ヲ zweiseitiges $\mathfrak{O}$-Ideal ト云フ。

$\mathfrak{o}$ ヲ Ordnung $\mathfrak{O}$ ト äquivalent ナ γ ノ Teilmodul トスルトキ, $\mathfrak{o} c \subseteq \mathfrak{o}$ トナル γ ノ元 c ノ全体ハ $\mathfrak{O}$ ト äquivalent ナル Ordnung $\mathfrak{O}_r$ ヲ作ル. 又 $c \mathfrak{o} \subseteq \mathfrak{o}$ トナル γ ノ元 c ノ全体ハ $\mathfrak{O}$ ト äquivalent ナル Ordnung $\mathfrak{O}_l$ ヲ作ル. $\mathfrak{o}$ ハ $\mathfrak{O}_r$-Rechtsideal デ且ツ $\mathfrak{O}_l$-Linksideal デアル。

Def. $\mathfrak{O}_r$, $\mathfrak{O}_l$ ヲ夫々 $\mathfrak{o}$ ノ Rechtsordnung, Linksordnung ト云フ. 特ニ $\mathfrak{O}_r$, $\mathfrak{O}_l$ ガ共ニ Maximalordnung ニナルトキ $\mathfrak{o}$ ノコトヲ normales Ideal ト呼ブ.

コレカラーツノ Ordnung ノミデナク互ニ äquivalent ナ Ordnungen ノ System ヲ取リ扱フ. ヨッテ特ニ断ラナイ限リ, 単ニ Ordnung ト云ヘバ或ル一定ノ Ordnung $\mathfrak{O}_0$ ト äquivalent ナ Ordnung ヲ意味スルモノトスル.

吾々ノ Axiom ハ次ノ通リ.

I. 少クトモ一ツノ Maximalordnung ガ存在スル.

II. 任意ノ Maximalordnung $\mathfrak{O}$ ニ於テ ganze zweiseitige Ideale ($\mathfrak{O}$ ニ含マレル, $\mathfrak{O}$-Ideale) ニ関シ Teilerkettensatz ガ成立スル.

III. 任意ノ Maximalordnung $\mathfrak{O}$ ニ於テ Primideal $\mathfrak{p}$ ハ凡ベテ stark teilerlos デアル,(2)

---

(2) $\mathfrak{p}$ ヲ $\mathfrak{O}$ ニ含マレル z. $\mathfrak{O}$-Ideal トスル. $\mathfrak{O}$ ニ含マレル任意ノ z. $\mathfrak{O}$-Ideale $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ ニ対シテ, $\mathfrak{ab} \subseteq \mathfrak{p}$ ナラバ $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ 又ハ $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$ トナルトキ, $\mathfrak{p}$ ヲ $\mathfrak{O}$ ノ Primideal ト云フ.

又 Restklassenring $\mathfrak{O}/\mathfrak{p}$ が einfacher Ring トナルトキ, $\mathfrak{p}$ ハ stark teilerlos デアルト云フ. (次頁ヘツヅク)

以上ノ公理ニヨッテ Algebra ニ於ケル Arithmetik ガ基礎付ケラレル．特ニ次ノ事實ガ成立スル。

任意ノ Maximalordnung ニ関スル右及ビ左 Ideal ハ見テ normales Ideal デアリ，normale Ideale ノ全体ガ eigentliche Multiplikation[3] ヲ結合法トシテ Gruppoid ヲ作ル．ソノ際 Maximalordnungen ガ Einheiten ヲナス．コノ Gruppoid ノ中デ同一ノ Maximalordnung ニ関スル zweiseitige Ideale ノ全体ハ乗法ニ関シ一ベツノ群ヲ作リ，ソレハ Primideal ニヨッテ生成サレル無限巡回群ノ直積デアル．$\mathfrak{O}, \mathfrak{O}'$ ヲニツノ Maximalordnungen トシ，ニヲ $\mathfrak{O}, \mathfrak{O}'$ ヲ夫々左及ビ右ノ Ordnung トスル

(前頁ノ續キ)

stark teilerlos ナラバ Primideal デアルガ，逆ニ $\mathfrak{O}$ ノ primideal $\mathfrak{p}$ ハ ひつの つ $\mathfrak{p}$ ナル $\mathfrak{O}$-Linksideal $\mathfrak{a}$ ニ関シ最ハ條件ガ成立スルトキニ限リ stark teilerlos デアル。

(3) $\mathfrak{p}$ ノ Teilmodul $\mathfrak{a}$ トヒ，Produkt $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ ニ於テ，$\mathfrak{a}$ 又ハ $\mathfrak{b}$ ヲソノ echter Teiler ナル Modul デ置キ換ヘ，然モ積ノ結果ヲ不變ナラシメルコトガ不可能ナルトキ，コノ $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ ナル Produkt ヲ eigentliches Produkt ト云ヒ，又カカル乗法ヲ eigentliche Multiplikation ト云フ．$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ ガ共ニ normales Ideal ナルトキニハ $\mathfrak{a}$ ノ Rechtsordnung ト $\mathfrak{b}$ ノ Linksordnung ガ一致スルトキ，ソノ時ニ限リ積 $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ ハ eigentlich ナル。

normales Ideal トスレバ $\mathfrak{a} \to \mathfrak{C}'\mathfrak{a}\mathfrak{C}$ ニヨッテ $\mathfrak{O}$-Ideale ノ全体ハ $\mathfrak{O}'$-Ideale 全体ノ上ニ同型ニ移サレル．且ツ此ノ同型對應ヘ $\mathfrak{C}$ ノ取リ方ニハ依存シナイ．（此ノ對應ニヨルト Ideale ハ互ニ zusammengehörig デアルト云フ）

更ニ此ノ逆ノ事實ガ成立スル．即チ

$\mathfrak{o}$ ノ中ニ正規元ヲ含ム如キ Teilmodul $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots\ldots$, $\mathfrak{O}, \ldots\ldots$ ノ System $\mathfrak{o}$ ガ與ヘラレテヰテ，コレニ関シ次ノ條件ガ成立スルモノトスル。

A. $\mathfrak{o}$ ハ gruppoid ヲナス．$\mathfrak{o}$ ノ元 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ ガ komposierbar ナラバ，$\mathfrak{o}$ ニ於ケル積 $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ ハ普通ノ Modulprodukt ト一致スル。

B. $\mathfrak{o}$ ノ Einheit ハ $\mathfrak{o}$ ノ Ordnung ヲナス。

C. $\mathfrak{O}$ ヲ $\mathfrak{o}$ ノ Einheit トスル．$\mathfrak{O}$ ヲ含マレル $\mathfrak{O}$-Linksideal ハ $\mathfrak{O}$ ヲ Linkseinheit トスル $\mathfrak{o}$ ノ元デアル．又 $\mathfrak{O}$ ヲ含マレル $\mathfrak{O}$-Rechtsideal ハ $\mathfrak{O}$ ヲ Rechtseinheit トスル $\mathfrak{o}$ ノ元デアル。

然ラバ $\mathfrak{o}$ ノ Einheiten ノ全体ハ互ニ äquivalent ナル Maximalordnungen ノ全体ヨリ成リ，コレニ関シ公理 I, II, III ガ成立スル．而シテ $\mathfrak{o}$ ハ normale Ideale 全体ノナス gruppoid ト一致スル。

$\mathfrak{o}$ ニ於テ以上ノ事實ガ成立スルトキ，$\mathfrak{o}$ ニ於テ Arithmetik ガ定義サレテオルト云フコトニスル。

$\mathfrak{o}$ ガ nilpotent ナ Radikal $\mathfrak{N}$ ヲ有シ，

$\gamma/\mathfrak{r}$ が halbeinfacher Ring ニナル場合ニハ，$\mathfrak{o}$ ト共ニ

$$\mathfrak{o}^* = (\mathfrak{o},\ \mathfrak{o}\subset\mathfrak{o},\ \cdots\cdots,\ (\mathfrak{o}\subset\mathfrak{o})^{p-1})$$

$$(c\in\mathfrak{r},\ \mathfrak{r}^p = 0)$$

ガ Ordnung ヲナスコトガ容易ニ示サレル．従ッテ $\mathfrak{o}$ ガ maximal ナラバ $\mathfrak{o}=\mathfrak{o}^*$ トナリ，結局 $\mathfrak{o}\supset\mathfrak{r}$ トナル．次ニ $\mathfrak{a}$ ヲ $\mathfrak{o}$-Linksideal トスレバ，$\mathfrak{a}$ ハ正規元 α ヲ含ムカラ

$$\mathfrak{a}\supset\mathfrak{o}\alpha\supset\mathfrak{r}\alpha=\mathfrak{r}$$

カクテ凡テノ normale Ideale ガ Radikal $\mathfrak{r}$ ヲ含ム．ヨッテ Restklassenring $\gamma/\mathfrak{r}$ ヲ作リ，$\mathfrak{a}$ ノ代リニ $\mathfrak{a}/\mathfrak{r}$ ヲ用フルコトニスレバヨイカラ，始メカラ γ ヲ halbeinfach トシテオイテモ一般性ヲ失ハナイ．更ニ halbeinfach ノ場合ハ容易ニ einfach ノ場合ニ帰着セシメラレル．

§2.

本節デハ γ ヲ特ニ einfache Algebra トシ，K ヲ γ ノ Zentrum トスル．K ニ於テ Arithmetik ガ定義サレテヰレトキ，即チ K ガ或ル整域 $\mathfrak{o}$ ノ Quotientenkörper デ K ニ於ケル $\mathfrak{o}$-Ideale ガ群ヲナストキ，γ ノ $\mathfrak{o}$ ニ関スル ganzes Element，即チ γ ノ元デ $\mathfrak{o}$ ニ関シ algebraisch ganz ニナル元ガ作ル Ring ノ中デ maximal ナモノガ存在シ，カヽル maximal

+Ring ヲ Maximalordnungen トスルマウナ γ ノ Arithmetik ガ定義出來ルコトハ Algebra ノ整數論ニ於テ周知ノ事實デアル。(4) K ノ Arithmetik ハ上ノ様ナ意味デ γ ノ Arithmetik ニマデ拡張サレルワケデアルガ，然ラバ逆ニ γ ノ如何ナル Arithmetik モ K ニ於ケル或ル Arithmetik ヲ拡張スルコトニヨッテ得ラレルデアロウカ！ 答ハ肯定的デアル．コレヲ証明スルノガ本論文ノ目的デアル。

γ ニ於テーツノ Arithmetik ガ定義サレテヰルモノトスル。

Lemma 1. $\mathfrak{o}, \mathfrak{o}'$ ヲ Zusammengehörig+ル Zweiseitige Ideale トスレバ $[\mathfrak{o}, K] = [\mathfrak{o}', K]$. 特ニ O, O' ヲニツノ Maximalordnungen トスレバ $[O, K] = [O', K]$.

(証明) $\mathfrak{o}' = \xi^{-1}\mathfrak{o}\xi$ ナル ξ ガアルカラ

$$[\mathfrak{o}, K] \subseteq [\mathfrak{o}, K]\xi^{-1}\xi = \xi^{-1}[\mathfrak{o}, K]\xi \subseteq \xi^{-1}\mathfrak{o}\xi = \mathfrak{o}'$$

故ニ $[\mathfrak{o}, K] \subseteq [\mathfrak{o}', K]$. 同様ニ $[\mathfrak{o}', K] \subseteq [\mathfrak{o}, K]$

Q. E. D.

$[O, K]$ ハ Maximalordnung O ノ取リ方ニハ関係セズニ確定スル．コレヲ O デ表ハス。

Lemma 2. K ガ O ノ Quotientenkörper デ且 K ニ於テ O ヲ Hauptordnung トシテ Arithmetik ガ成立スルナラバ，γ ニ於テ與ヘラレタル Arithmetik ハ

(4) Deuring, Algebren 参照.

此ノ K ノ Arithmetik ヲ拡張シタモノデアル。

（証明） $\mathfrak{o}$ ニ於テ與ヘラレタル Arithmetik ニ於ケル Maximalordnung ヲ $\mathfrak{o}$ デ表ハシ，又 K ノ Arithmetik ヲ拡張シテ得ラレル $\mathfrak{g}$ ノ Arithmetik ニ於ケル Maximalordnung ヲ $\mathfrak{o}^*$ デ表ハス．$\mathfrak{o}$ ト $\mathfrak{o}^*$ ガ äquivalent ニナルコトヲ示セバヨイ．先ヅ任意ノ $\mathfrak{o}^*$ ハ適當ナ $\mathfrak{o}$ ニ含マレル．$\mathfrak{o}$, ヲ $\mathfrak{g}$ ノ與ヘラレタル Arithmetik ニ於ケル Maximalordnung ノーツトスレバ，$\mathfrak{o}^*$ ハ endlicher $\mathfrak{o}$-Modul デアルカラ $\mathfrak{o}^* \lambda \subseteq \mathfrak{o}$, トナル正規元入ガ存在スル．ヨツテ $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{o}^*$ ハ $\mathfrak{o}$,-Linksideal デアル．$\mathfrak{o}$, $\mathfrak{o}^*$ ノ Rechtsordnung ヲ $\mathfrak{o}$ トスレバ $\mathfrak{o} \supseteq \mathfrak{o}^*$.

次ニ $\mathfrak{o} \neq \mathfrak{o}^*$ トシテ矛盾ヲ生ズルコトヲ証明スル。$a \in \mathfrak{o}$, $a \overline{\in} \mathfrak{o}^*$ トスレバ $\mathfrak{a}^* = (\mathfrak{o}^*, \mathfrak{o}^* a \mathfrak{o}^*)$ ハ zweiseitiges $\mathfrak{o}^*$-Ideal デ，$\mathfrak{a}^* \supset \mathfrak{o}^*$ ダカラ $\mathfrak{c}^* = \mathfrak{a}^{*-1}$ ハ $\mathfrak{o}^*$ ト異ル ganzes z. $\mathfrak{o}^*$-Ideal デアル．$\mathfrak{c}^*$, Primteiler ノーツヲ $\mathfrak{p}^*$ トスレバ

$$\mathfrak{o} \supseteq \mathfrak{a}^* = \mathfrak{c}^{*-1} \supseteq \mathfrak{p}^{*-1}$$

$[\mathfrak{p}^*, K] = \mathfrak{f}$ トスレバ $\mathfrak{f}\mathfrak{o}^* = \mathfrak{p}^{*e}$ トナルカラ

$$\mathfrak{o} \supseteq \mathfrak{p}^{*-e} \supseteq \mathfrak{f}^{-1}, \quad \text{縦ッテ } \mathfrak{o} \supseteq \mathfrak{f}^{-1}$$

カヲ矛盾ヲ生ズル，故ニ $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}^*$．縦ッテ両種ノ Maximalordnungen ハ互ニ äquivalent ニナル，Q. E. D.

簡單ノタメ $\mathfrak{g}$ ノ Maximalordnungen ヲ

Index デ區別シテ，$\mathfrak{o}_i$, $\mathfrak{o}_j$, ... 等デ示ス．又 $\mathfrak{o}_i$, $\mathfrak{o}_j$ ヲ夫々左及ビ右ノ Ordnung ニスル様ナ normales Ideal ヲ $\mathfrak{a}_{ij}$, $\mathfrak{b}_{ij}$, ... 等デ表ハス．特ニ $\mathfrak{o}_i$-Ideal ハ $\mathfrak{a}_{ii}$, $\mathfrak{b}_{jj}$, ... デ表ハス．

今互ニ zusammengehörig ナ Primideal ノ System $\mathfrak{P}$; $\mathfrak{p}_{ii}$, $\mathfrak{p}_{jj}$, ... ヲ考ヘル．$\mathfrak{a}_{ij}$ ヲ任意ノ normales Ideal トシ

$$\mathfrak{c}_{ii}\,\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}_{ij}, \quad \mathfrak{c}_{ii} \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p}_{ii})$$

ナル ganzes Ideal $\mathfrak{c}_{ii}$ が存在スルヤウナ γ ノ元 a ノ全体ヲ $\mathfrak{a}_{ij\mathfrak{P}}$ デ表ハス．$\mathfrak{a}_{ij\mathfrak{P}}$ ハ又

$$a\,\mathfrak{c}_{jj} \subseteq \mathfrak{a}_{ij}, \quad \mathfrak{c}_{jj} \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p}_{jj})$$

ナル ganzes Ideal $\mathfrak{c}_{jj}$ が存在スルヤウナ γ ノ元 a ノ全体ト一致スル．特ニ $\mathfrak{o}_{i\mathfrak{P}}$ ハ γ ノ Ordnung ヲナシ

$$\mathfrak{a}_{ij\mathfrak{P}} = \mathfrak{o}_{i\mathfrak{P}}\,\mathfrak{a}_{ij} = \mathfrak{a}_{ij}\,\mathfrak{o}_{j\mathfrak{P}} = \mathfrak{o}_{i\mathfrak{P}}\,\mathfrak{a}_{ij}\,\mathfrak{o}_{j\mathfrak{P}}$$

従ツテ $(\mathfrak{a}_{ij}\,\mathfrak{a}_{kl})_{\mathfrak{P}} = \mathfrak{o}_{i\mathfrak{P}}\,\mathfrak{a}_{ij}\,\mathfrak{a}_{kl}\,\mathfrak{o}_{l\mathfrak{P}} = \mathfrak{a}_{ij\mathfrak{P}}\,\mathfrak{a}_{kl\mathfrak{P}}$

今 $\mathfrak{a}_{ij\mathfrak{P}}$ ト $\mathfrak{a}_{kl\mathfrak{P}}$ ハ $\mathfrak{a}_{j\mathfrak{P}} = \mathfrak{o}_{k\mathfrak{P}}$ ナルトキ，ソノ時ニ限リ komposicrbar ト定義スレバ，コレニヨツテ $\mathfrak{a}_{ij\mathfrak{P}}$ ノ全体ガ Gruppoid $\mathfrak{G}_{\mathfrak{P}}$ ヲ作リ，ソレガ γ ニ於ケル一ツノ Arithmetik ヲ定義スルコトハ容易ニ示サレル．尚凡テ $\mathfrak{P}$ ニ亘ツテ $\mathfrak{a}_{ij\mathfrak{P}}$ ノ Durchschnitt ヲ取レバ丁度 $\mathfrak{a}_{ij}$ ヲ得ル。

α ヲ K ノ 0 ナラザル元トシ

$$\alpha\,\mathfrak{o}_i = \mathfrak{p}_{ii}^{\nu}\,\mathfrak{a}_{ii} \ (\mathfrak{a}_{ii}, \text{ zu } \mathfrak{p}_{ii} \text{ prim})$$

$$\varphi(\alpha)=c^{\nu}\ (0<c<1),\quad \varphi(0)=0$$

トスレバ，コレニヨッテ K ノ nicht-archimedisch ナル diskrete Bewertung ガ定義サレルコトハ容易イ．コレハ $\mathfrak{o}_i$, $\mathfrak{p}_{ii}$ ノ代リニ $\mathfrak{o}_j$, $\mathfrak{p}_{jj}$ ヲ取ッテモ同ジデアル。今

$$\varphi(\alpha)\leqq 1,\quad \alpha\in K$$

トナル α 全体ノナス整域ヲ $\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}}$ トスレバ K ハ $\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}}$ ノ Quotientenkörper デ $\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}}=[\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}}, K]$ トナルコトハ明カデアル．$\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}}$ ハ Hauptidealring デアルカラ K ニ於テ $\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}}$ ヲ Hauptordnung トスル Arithmetik ガ成立スル．

従ッテ Lemma 2 ニヨリ $\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}}$ ニヨッテ定義サレル γ ノ Arithmetik ハ此ノ K ノ Arithmetik ヲ γ ニマデ拡張シタモノニ他ナラナイ。

Lemma 3. 任意ノ ganzes $\mathfrak{o}$-Linksideal $\mathfrak{a}$ ハ $\mathfrak{o}$ ナラザル K ノ元ヲ含ム。

（証明） $\mathfrak{a}$ ハ正規元 a ヲ含ム．a ノ Minimalpolynom

$$a^{t}+\alpha_1 a^{t-1}+\cdots\cdots+\alpha_t=0\quad(\alpha_i\in K)$$

ヲ取ルト $\alpha_t\neq 0$．$a\in\mathfrak{a}_{\mathfrak{P}}$，且ツ a ハ $\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}}$ ニ関シ alg. ganz. デアルカラ $\alpha_i\in\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}}$．故ニ $\alpha_t\in\mathfrak{a}_{\mathfrak{P}}$，従ッテ $\alpha_t\in\mathfrak{a}$.

Lemma 4. γ ノ任意ノ元 x ニ対シ，$\mathfrak{o}$ ノ $\mathfrak{o}$ ナラザル元 α ヲ適当ニ取レバ $x\alpha\in\mathfrak{o}$.

(証明) 先ず $x\mathfrak{o}\subseteq\mathfrak{o}$ ナル如キ $\mathfrak{o}$ ニ含マレル正規元 x ガ存在スル. $\mathfrak{o}$ ニ含マレル 0 ナラザル K ノ元ヲ α トスレバ $x\alpha\in\mathfrak{o}$, $\alpha\in\mathfrak{o}$.

lemma 5. K ハ $\mathfrak{o}$ ノ *Quotientenkörper* デアル。

(証明) $\alpha\in K$ ニ對シ $\mathfrak{o}$ ノ元 $\beta\neq 0$ ヲ適當ニトレバ $\alpha\beta\in\mathfrak{o}$. 從ッテ $\alpha\beta=\gamma\in\mathfrak{o}$. $\alpha=\frac{\gamma}{\beta}$ Q.E.D.

以上ノ結果ヲ利用シ K ニ於ケル $\mathfrak{o}$-*Ideale* ガ群ヲナスコトヲ証明スル. $\mathfrak{a}$ ヲ任意ノ $\mathfrak{o}$-*Ideal* トシ, $\mathfrak{a}=(\mathfrak{a}\mathfrak{o})^{-1}$ トスレバ, $\mathfrak{a}\mathfrak{a}=(\mathfrak{a}\mathfrak{o})^{-1}(\mathfrak{a}\mathfrak{o})=\mathfrak{o}$. 故ニ

$$a_1\alpha_1+\cdots\cdots+a_r\alpha_r=1.\quad a_i\in\mathfrak{a},\ \alpha_i\in\mathfrak{a}$$

トナル a_i, α_i ガ存在スル. 今 $x_1,\cdots\cdots,x_r$ ヲ互ニ独立ナル *Unbestimmte* トシ, $a_1x_1+\cdots\cdots+a_rx_r$ ノ正規表現ノ *Norm* ヲ取ル.

$$N(a_1x_1+\cdots\cdots+a_rx_r)$$

$$=\sum_{\nu_1+\cdots+\nu_r=n} \alpha_{\nu_1\cdots\nu_r}x_1^{\nu_1}\cdots\cdots x_r^{\nu_r},\quad n=(\gamma:K)$$

$\mathfrak{a}_{\mathfrak{P}}=\mathfrak{a}\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}}$ ト置ケバ $\mathfrak{a}_{\mathfrak{P}}^{-1}\mathfrak{a}_{\mathfrak{P}}=\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}}$. ヨッテ

$$(\mathfrak{a}_{\mathfrak{P}}^{-1}\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}})\mathfrak{a}_{\mathfrak{P}}=\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}}=\mathfrak{a}_{\mathfrak{P}}\mathfrak{a}_{\mathfrak{P}},$$

$$\mathfrak{a}_{\mathfrak{P}}=(\mathfrak{a}_{\mathfrak{P}}\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}})^{-1}=\mathfrak{a}_{\mathfrak{P}}^{-1}\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}}.$$

$\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}}$ ハ *endlicher* $\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}}$-*Modul* ナリ且ツ $\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}}$ *Hauptidealring* デアルカラ, $\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}}$ ニ関シ *Minimal*-

Basis ヲ有スル，

$$\mathfrak{o}_{\mathbb{P}} = \mathfrak{o}_{\mathbb{P}} u_1 + \cdots\cdots + \mathfrak{o}_{\mathbb{P}} u_n$$

従ッテ $\mathfrak{a}_{\mathbb{P}} = \mathfrak{o}_{\mathbb{P}}^{-1} u_1 + \cdots\cdots + \mathfrak{o}_{\mathbb{P}}^{-1} u_n$

今 $u_1, \cdots\cdots, u_n$ ヲ Basis トシテ正規表現ヲ作レバ，$\mathfrak{a}$ ノ元ナル α_i ニ対応スル行列 A_i ノ係数ハ $\mathfrak{o}_{\mathbb{P}}^{-1}$ ニ属スル．故ニ

$$N(a_1 x_1 + \cdots\cdots + a_r x_r) = Det.(A_1 x_1 + \cdots\cdots + A_r x_r)$$
$$= \sum \alpha_{\nu_1 \cdots \nu_r} x_1^{\nu_1} \cdots\cdots x_r^{\nu_r}$$

ヨリ $\alpha_{\nu_1 \cdots \nu_r} \in \mathfrak{o}_{\mathbb{P}}^{-n}$．従ッテ

$$\alpha_{\nu_1 \cdots \nu_r} \in \underset{\mathbb{P}}{D}(\mathfrak{o}_{\mathbb{P}}^{-n}) \quad \left(\begin{array}{l}\text{凡テノ } \mathbb{P} \text{ ノ上ニ亘ル} \\ Durchschnitt\end{array}\right)$$

$x_1, \cdots\cdots, x_r$ ニ夫々 $\alpha_1, \cdots\cdots, \alpha_r$ ヲ代入スレバ

$$1 = \sum \alpha_{\nu_1 \cdots \nu_r} \alpha_1^{\nu_1} \cdots\cdots \alpha_r^{\nu_r} \in \underset{\mathbb{P}}{D}(\mathfrak{o}_{\mathbb{P}}^{-n})\mathfrak{o}^n.$$

$$\mathfrak{o} \subseteq \underset{\mathbb{P}}{D}(\mathfrak{o}_{\mathbb{P}}^{-n})\mathfrak{o}^n \subseteq \underset{\mathbb{P}}{D}(\mathfrak{o}_{\mathbb{P}}^{-n}\mathfrak{o}_{\mathbb{P}}^{n}) = \underset{\mathbb{P}}{D}(\mathfrak{o}_{\mathbb{P}}) = \mathfrak{o}$$

故ニ $b\mathfrak{o} = \mathfrak{o}$ $\left(b = \underset{\mathbb{P}}{D}(\mathfrak{o}_{\mathbb{P}}^{-n})(\mathfrak{o}^{n-1})\right)$．即チ $\mathfrak{o}$ ハ Umkehr-bar デアリ，K ニ於ケル $\mathfrak{o}$-Ideale ハ群ヲナス．

以上ニヨッテ吾々ノ主張ガ完全ニ証明サレタワケデアル。