



Title	類体論ノ算術的証明 (Chevalleyノ方法)
Author(s)	河田, 敬義; 山本, 進
Citation	全国紙上数学談話会. 1940, 203, p. 341-355
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74810
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

880. 類体論 / 算術的証明 (Chevalley, 方法)

河田 敬義 (東大)

山本 進 (東大學生)

類体論 / 算術的証明ハ Chevalley が C. R. = 1935 年ニ発表シタガ、詳シイ証明ハ略サレテアツタ。今回 "La théorie du corps de classes" (Annals of Math. 41 (1940)) (以後 Ann. トシテ引用) = 於テイデヤルノ代リニ *idèle* ナル考ヘヲ用ヒテ丁寧ニソノ証明ヲ與ヘタ。丁度後期學生セミナリーデ類体論ヲ赤網先生ニ指導シテ戴イテ居マシタノデ。(考ヘトシテハ寧ロ逆行デスガ) ソノ *idèle* ノ理論ヲ再ビイデヤル論ニシテ考ヘ直シテ見マシタノデ、其レニヨツテ Chevalley ノ方法ヲ御紹介シヤウト思ヒマス。

以下高木先生: 代数的整数論ヲ(講座)トシテ, Chevalley ノ東大紀要ノ論文ヲ(紀要)トシテ引用シマス。

1

記号ノ説明: k ヲ有限次代数体, ソノ類数ヲ h , 各類カラノ代表ヲ $j_1, \dots, j_h$. K/k ヲ有限アーベル拡大, ソノガロア群ヲ $G(K/k)$, K ノ各類ノ代表ヲ $\mathfrak{f}_1, \dots, \mathfrak{f}_h$ トスル。

M ヲ k ノ *Prindivisor* , 有限箇ノ集リトスルトキ, k ノイデヤル $\alpha = \prod \mathfrak{p}_i^{a_i}$ ナルイデヤルヲ M ノ如ク定

義スル。

$$\alpha = \prod_{p \in M} p^e \cdot \prod_{p' \notin M} p'^{e'} \quad \text{+ ラバ} \quad \alpha_M = \prod_{p' \notin M} p'^{e'}$$

即チ $(\alpha, p) = 1$, $p \notin M$ トナル。

k , Idealmodul $m = \text{對シテ } \text{mod. } m.$ の乗法群
ヲ $\mathcal{R}_m$ ト書ク。

A_m, S_m 等ハ例ノ通り。

今 M が次ノ三種ノ素イデヤルハスベテ含ムモノトスル。

1) アル $f_i (i=1, \dots, k)$ ノ約数トナルモノ。

2) アル $N_{k,k} f_i (i=1, \dots, k')$ ノ約数トナルモノ

3) f_∞ . サテ

$$m = \prod_{p \in M} p^e \quad (e > 0) \quad \text{トシテ} \quad \mathcal{R}_m \text{ カラ } A_m / S_m \text{ へ}$$

homomorph + 對應 φ タ次ノ如クニ定メル。

$k \ni \alpha \neq 0$ / $\text{mod. } m$ / クラスヲ $\bar{\alpha}$ トスルト

$\varphi(\bar{\alpha}) = (\alpha)_M S_m$ トスル。コノ定義ガ意味ヲ持ツタメニ

ハ、 $\alpha \equiv \alpha' (m)$ + ラバ $(\alpha)_M S_m = (\alpha')_M S_m$ ガアレバ

ヨイ。コレハ $\alpha^{-1} \alpha' \equiv 1 (m)$ カラ $(\alpha)_M^{-1} \cdot (\alpha')_M = (\alpha^{-1} \alpha')_M$

$= (\alpha^{-1} \alpha') \in S_m$ カラワカル。

次ニ φ ハ $\mathcal{R}_m$ ヲ A_m / S_m 全体ニ寫スコトハ、 $A_m \ni \alpha$

$=$ 對シテ $\alpha = (\alpha) f_k$ トナルカラ、 $\alpha = \alpha_M = (\alpha)_M f_k M =$

$(\alpha)_M$ カラワカル。

k / M -Einheit β トハスベテ、 $p \notin M =$ 對シテ

$(\beta, \beta) = 1$ とルコトより、 M -Einheit / 全体 E^M (又 $E^M(k)$) と書クコト=スル。

E^M / 元ヲ代表サレルクラスヲ $\mathcal{E}_m^M$ と書ケバ

$$(4) \quad \mathcal{R}_m / \mathcal{E}_m^M \cong A_m / S_m$$

$\varphi(\bar{\beta}) = S_m$ ハ明カデアアルガ、逆 = $\varphi(\bar{\alpha}) = S_m$ トラバ

$(\alpha)_M = (\alpha_1)$, $\alpha_1 \in S_m$ 即チ $(\alpha \alpha_1^{-1})_M = 1$ とル故

$\alpha \alpha_1^{-1} = \beta \in E^M$, 故 = $\bar{\alpha} = \overline{\alpha_1 \beta} = \bar{\beta}$.

故 = $\varphi(\bar{\alpha}) = S_m$ トラ $\bar{\alpha} \in \mathcal{E}_m^M$ とナル。

H_m 例ノ如ク $(\alpha_1) N_{K/k} \alpha_1$ ($\alpha_1 \equiv 1(m)$) とル群トスレバ

$$(5) \quad \mathcal{R}_m / \mathcal{R}_m \cdot \mathcal{E}_m^M \cong A_m / H_m$$

コト = $\mathcal{R}_m \text{ mod. } m$, K/k , ノルム剰餘ノ群トスル。

(証) $\alpha \equiv N_{K/k} A(m)$ トラバ

$$(\alpha)_M S_m = (N_{K/k} A)_M S_m = N_{K/k} \cdot (A)_M, S_m \in H_m$$

コト = $p \mid p \in M$ とル K , p / 全体ヲ M' とスル。(次後同ジ意味デ M' とル記号ヲ使フ)

逆 = $\alpha \in H_m$ トラバ, $\alpha = (\alpha_1) N_{K/k} \alpha_1$ ($\alpha_1 \equiv 1(m)$)

一方 M , 2) / 假定カラ $\alpha = (A)_M$ と書ケルカラ。

$$\begin{aligned} (\alpha)_M = \alpha &= (\alpha_1) N_{K/k} \alpha_1 = (\alpha_1) \cdot N_{K/k} (A)_{M'} \\ &= (\alpha_1)_M (N_{K/k} A)_M \end{aligned}$$

故 = (4) カラ $\alpha_1 N_{K/k} A \cdot \alpha_1^{-1} = \beta \in E^M$, 即チ

$$\alpha = \overline{N_{K/k} A} \beta^{-1} \in \mathcal{H}_m \mathcal{L}_m^M.$$

以下ノ証明デ (4) (5) ノ 関係ハ基本的デアール。

2

$h_m(K/k) = (A_m : H_m)$ トスルト, $\mathcal{O}_f(K/k)$ が
zyklisch ノ 場合 =

$$(b) \quad h_m(K/k) \geq (K:k) = n$$

但シ m ハ 適當 = 大キクエラブ。又逆ニソノ時

$$(n) \quad h_m(K/k) / n \text{ 〆 } (\Delta \text{ ハ アール自然数})$$

ヲ証明スル。

(6) (n) ノ 証明ハ (講座) ノ 方法ヲ多少変形シテ 次ノ 通
リ

先ツ M + ル 素イデアルノ 集リヲ 1) 2) 3) / $\Delta = 8$ / $\mathfrak{p}$
モ スベテ 含ムモノ トスル。

2) K/k デ 分岐スルモノ。

$M \ni \mathfrak{p} =$ 對シテ $\mathfrak{p}^c$ ヲ n 中 剩餘ノ 臨界中 (以上) = ト
ル。即チ

$$\alpha \equiv 1 (\mathfrak{p}^c) + \text{フバ} \quad \alpha \equiv \beta^r (\mathfrak{p}^r), \quad r = 1, 2, \dots$$

$$m = \prod_{\mathfrak{p} \in M} \mathfrak{p}^c \text{ トオク。}$$

(以後 $\mathfrak{p}^c$ ハ スベテコノ 意味 = 用ヒル。 c : critical)

(5) カラ

$$(9) \quad (A_m : H_m) = (\mathcal{H}_m : \mathcal{H}_m \cdot \mathcal{L}_m^M) = \frac{(\mathcal{H}_m : \mathcal{H}_m)}{(\mathcal{H}_m \mathcal{L}_m^M : \mathcal{H}_m)}$$

$$(10) \quad \text{シカル} = (K_m : k_m) = \prod_{p \in M} e_p f_p \quad (\text{講座 199 頁,}$$

Ann. p. 405), 且つ $e_p f_p / n + 1$ 故 M の p の数ヲ Δ トス
レバ (9) カラ (9) が成立スル。

次 $\alpha \rightarrow \bar{\alpha} \pmod{m} + 1$ homomorph + 對應ヲ
考ヘレバ

$$(11) \quad (E^M(k) : N_{Kk} E^{M'}(K)) = (\varphi_m^M : N_{Kk} \varphi_m^{M'}(K))$$

$$\times (E^M(k) \cap S_m : N_{Kk} E^{M'}(K) \cap S_m)$$

$$= (\varphi_m^M : \varphi_m^M \cap K_m) (\varphi_m^M \cap K_m : N_{Kk} \varphi_m^{M'}(K))$$

$$\times (E^M(k) \cap S_m : N_{Kk} E^{M'}(K) \cap S_m)$$

$$\text{故} = (K_m \varphi_m : K_m) = (\varphi_m : K_m \cap \varphi_m) \text{ カラ (11) } \Rightarrow (9)$$

= 代入スレバ

$$(E^M(k) : N_{Kk} E^{M'}(K)) = \frac{\prod_{p \in M} e_p f_p}{n} \quad (\text{Ann. p. 408})$$

ト (10) ヲ用ヒテ

$$(12) \quad (A_m : H_m)$$

$$= n \cdot (\varphi_m^M \cap K_m : N_{Kk} \varphi_m^{M'}(K)) (E^M(k) \cap S_m : N_{Kk} E^{M'}(K) \cap S_m)$$

トナリ、(6) が成立スル。

3

次 = 問題ノ中心デアル。

$$(13) \quad h_m(K/k) = (A_m : H_m) \leq (K : k) = n$$

ヲ一般ノアーベル体ノ場合ニ証明スル。

○第一段 K/k ヲアーベル擴大, $K \supset K' \supset k$ トスルト,
 m ヲ十分大ニシテ

$$(14) \quad h_m(K/k) \mid h_m(K/K') \cdot h_m(K'/k).$$

(証) $A_m(K')/H_m(K/K')$ カラ $N_{K'/k}$ ナル homomorphism
 ナ對應 $f = \exists$ $A_m(k)/H_m(K/k) = \text{寫スト}$

$$(f(A_m(K')) : f(H_m(K/K'))) \mid (A_m(K') : H_m(K/K')),$$

$$\text{左辺} = (H_m(K'/k) : H_m(K/K')) = \frac{(A_m(k) : H_m(K/k))}{(A_m(k) : H_m(K'/k))},$$

即チ (14) が成立スル。——

之レニヨリテ (13) ハ $(K:k) = p$ ナ素數ノ場合ニヨリ
 証明スルベヨイ。

○第二段 $(K:k) = p$ トス。 $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{p}}$ トスルト

$$\begin{array}{ccc} k(\zeta) & \xrightarrow{\quad} & K(\zeta) \\ d \downarrow & & \downarrow \\ k & \xrightarrow{\quad p \quad} & K \end{array} \quad \begin{array}{l} (k(\zeta):k) = d \mid p-1, \text{ 故} = (q) \text{ カラ} \\ (k(k(\zeta):k), p) = 1. \\ \text{又 } h(K/k) = p^u. \\ \text{故} = (14) \text{ カラ} \end{array}$$

$$p^u = h(K/k) \mid h(K(\zeta)/k) \mid h(k(\zeta)/k) \cdot h(K(\zeta)/k(\zeta))$$

即チ $h(K(\zeta)/k(\zeta)) = p$ が証明サレ、バ、ソレカラ

$u = 1$ トナリ, (13) が K/k ナ成立スル。故ニ (13) ハ

$K(\zeta)/k(\zeta)$ ナ証明サレ、バヨイ。

即チ初メカラ $k \supset \zeta$ トスルバ, クンメル体 $K = k(\sqrt[p]{\beta})$
 ノ場合ニ (13) ナ証明スルベヨイコトニナル。コレハ先ニ見ル
 如ク從來ノ存在定理ノ証明ヲ変形シテ出来ル。

4

補助定理 M は k の素イデアルの集りトシ、

$$15) \quad \text{スベテノ } \mathfrak{p} \in M$$

$$16) \quad \text{スベテノ } \mathfrak{p} \mid p + 1 \text{ル } \mathfrak{p}$$

$$17) \quad \text{スベテノ } \mathfrak{p} \mid \beta_0 + 1 \text{ル } \mathfrak{p}$$

$$18) \quad \text{アル } \mathfrak{p}_i: (i=1, \dots, k) \text{ヲ割ル } \mathfrak{p}, \text{ スベアル}$$

$$N_{K/k} \mathfrak{f}_i: (i=1, \dots, k') \text{ヲ割ル } \mathfrak{p}$$

ハスベテ M へ含マレルモノトスル。

然ルトキハ $k(\sqrt[p]{\beta_0})/k$ ヲ分解スル M へ入ラヌ素イデアル $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_s$ ガアツテ

$$19) \quad \theta \equiv \theta_{\mathfrak{p}}^p \pmod{\mathfrak{p}^c}, \text{ スベテノ } \mathfrak{p} \in M$$

$$20) \quad (\theta, \mathfrak{p}) = 1, \mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p} \notin M$$

ナラバ $\theta = \theta_0^p$ トナル。 (θ 等ハスベテ k の元, $\mathfrak{p}^c$ ハ p 中剰餘ノ臨界中)

ユノ補助定理ヲ用ヒルト,

$$m = \prod_{\mathfrak{p} \in M} \mathfrak{p}^c \text{ トスレバ}$$

$$E^M \ni \alpha \equiv \beta^p(m) \text{ ナラバ } \alpha = \alpha_0^p$$

$$\text{即チ } \mathcal{U}_m^M \cap \mathcal{R}_m^p = (\mathcal{U}_m^M)^p.$$

$$\text{特ニ } \beta = 1 \text{ トスレバ } E^M \cap S_m = (E^M)^p \cap S_m$$

故ニ (5) カラ

$$h(K/k) = (\mathcal{R}_m : \mathcal{R}_m \mathcal{U}_m^M)$$

$$= \frac{(\mathcal{R}_m : \mathcal{R}_m^p \mathcal{U}_m^M)}{(\mathcal{R}_m \mathcal{U}_m^M : \mathcal{R}_m^p \mathcal{U}_m^M)}$$

$$(\mathcal{R}_m : \mathcal{R}_m^P \mathcal{E}_m^M) = \frac{(\mathcal{R}_m : \mathcal{R}_m^P)}{(\mathcal{R}_m^P \mathcal{E}_m^M : \mathcal{R}_m^P)},$$

$$\begin{aligned} (\mathcal{R}_m^P \mathcal{E}_m^M : \mathcal{R}_m^P) &= (\mathcal{E}_m^M : \mathcal{E}_m^M \cap \mathcal{R}_m^P) \\ &= (\mathcal{E}_m^M : (\mathcal{E}_m^M)^P) = (E^M : (E^M)^P), \end{aligned}$$

$$(\mathcal{R}_m : \mathcal{R}_m^P) = p^{2(\delta+1)} \quad (\text{Ann. p. 409, 講座 p. 270})$$

$$(E^M : (E^M)^P) = p^{\delta+1} \quad (\text{Ann. p. 402}),$$

之レ等カラ

$$h(K/k) = \frac{p^{\delta+1}}{(\mathcal{R}_m \mathcal{E}_m^M : \mathcal{R}_m^P \mathcal{E}_m^M)}$$

トナレ。

※ = 補助定理デトツタ $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_\delta (f_m)$ カラ

$(\pi_i)_M = \mathfrak{p}_i = \pi_i \quad (i=1, \dots, \delta)$ ヲ選ブ。 $\mathfrak{p}_i$ ハ K/k デ
分解スルカラ K/k 1 Ideal norm, 即チ $\overline{\pi}_i \in \mathcal{R}_m$ ナ
ル。

$$\mathcal{R}_m \mathcal{E}_m^M \supset \mathcal{R}_\delta = \mathcal{R}_m^P \mathcal{E}_m^M \cdot \prod_{i=1}^{\delta} \overline{\pi}_i^{e_i} \text{ トオクト}$$

$$\overline{\pi} = \prod_{i=1}^{\delta} \overline{\pi}_i^{e_i} \in \mathcal{R}_m^P \mathcal{E}_m^M$$

ナリトスレバ

$\beta \pi \equiv \gamma^P (m), \beta \in E^M + \nu \beta, \gamma \in k$ ガアル。又
 $(\beta \pi)_M = \prod \overline{\pi}_i^{e_i} + \nu$ 故 $((\beta \pi), \mathfrak{p}) = 1, (\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p} \notin M).$

故 = 補助定理カラ

$$\beta \pi = \pi_0^P$$

即ち $\pi_{p_i}^{e_i} = (\pi_0)_M^p$ とあり $p|e_i$ ($i=1, \dots, \Delta$) とナル。

$$\text{之レカラ } (\mathcal{R}_0 : \mathcal{R}_m^p \mathcal{C}_m^M) = p^\Delta,$$

$$\text{即ち } (\mathcal{R}_m \mathcal{C}_m^M : \mathcal{R}_m^p \mathcal{C}_m^M) \geq p^\Delta,$$

$$\text{故に } h(K/k) \leq p$$

が証明セラレタ。

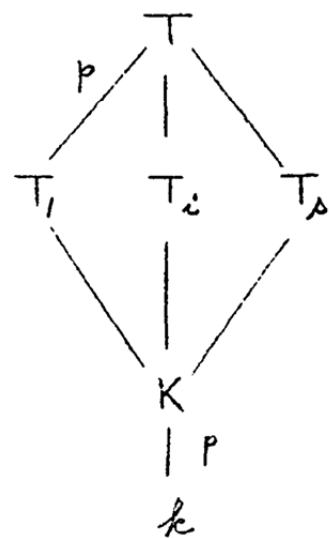
5

故に補助定理ヲ証明スレバヨイ。

E^M = 含まレル *Ordnung* 有限ナル群 E , h , Δ / ,
巾根ヨリナル群デアイル。假定カラ $E \ni \zeta_p$ 。

故に E^M Δ 箇ノ *Erzeuger* 有スル *freie abelsche Gruppe* ト E トノ積トナル。(Ann. p. 402).

今 $\beta_0 \notin (E^M)^p$ ナル故, $E^M / (E^M)^p$ $\Delta+1$ 箇ノ生成元ヲ持ツ $(p, \dots, p)$ 型ノ群デ、 $\forall$ *Basisklasse* カラ $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_\Delta$ ヲトル。(β_0 ヲ余マスコトが出来ル)。



$$T = k(\sqrt[p]{\beta_0}, \sqrt[p]{\beta_1}, \dots, \sqrt[p]{\beta_\Delta}),$$

$$T_i = k(\sqrt[p]{\beta_0}, \dots, \sqrt[p]{\beta_i}, \dots, \sqrt[p]{\beta_\Delta}) \text{ トスル。}$$

$\exists$ n $h \geq n$ カラ T/T_i ナル巡回群大デ分解シナイ T_i ノ素イデヤル $p^{(i)}$ ガ無限ニ沢山アルコトが分ルカラ, $N_{T_i/k} p^{(i)} = p_i$ ガ $M = \text{入ラヌ様} = p^{(i)}$ ($i=1, \dots, \Delta$) ヲ取ル。

$p_i \notin M$ ナル故 p_i $\Delta T/h$ デ分歧シナイ。(講座 p. 258)

又 T/k はガロア群 $(p, \dots, p)$ 型ナル故 (講座 p. 254), p_i は分解群ハ巡回群デナケレバナラヌカラ, p_i ハ T_i/k デ完全ニ分解スル, 故ニ特ニ K/k デ分解スル。

従ツテ

$$(21) \quad \beta_i = \gamma_{ij}^{p_j} (p_j^{c_j}) \quad (i=1, \dots, \Delta; i \neq j)$$

ナル γ_{ij} が存在スル。 (講座 p. 258) 但シ β_i ハ $\text{mod. } p_i^{c_i}$ デハ p 巾剰餘トハナラナイ。何トナレバ其ノ場合ニ p_i ハ T/k デ完全ニ分解シテシマフカラ。

サテ $k(\sqrt[p]{\theta}) = Z$ ヲ考ヘル。目標ハ $Z = k$ デイル。

$$(22) \quad \theta = \prod_{p \in E} p^e \prod_{i=1}^{\Delta} p_i^{f_i} \quad \text{ト分解スルト, } f_i \equiv 0(p) \text{ ナル } p_i \text{ ハ}$$

Z/k デ分岐シナイカラ (講座 p. 258), 今 $f_1, \dots, f_r \neq 0$, $f_{r+1}, \dots, f_{\Delta} \equiv 0(p)$ トシテ, M' ヲ (15) — (18) デ定メタ M ノ他ニ $p_1, \dots, p_r$ ヲ加ヘタモノトスル。

$$m' = \prod_{p \in M} p^c \prod_{i=1}^r p_i^{c_i} \quad \text{トオク。}$$

$Z = k$ ノ代リニ (5) カラ

$$(23) \quad \mathcal{R}_{m'} = \mathcal{R}_{m'} \mathcal{U}_{m'}^{M'}$$

ヲ証明スレバヨイ。假定 (19) カラ $E \ni p$ ハ Z/k デ分解スル。之レカラ $\text{mod. } m'$ ノクラス中 $\alpha \equiv 1 (p_i^{c_i}) \quad (i=1, \dots, r)$ デ代表サレルクラスハスベテ $\mathcal{R}_{m'} = \alpha$ ナル。 (講座 p. 201)

次ニ $\beta_1, \dots, \beta_{\Delta} \in E^N \subset E^{M'}$ ナル故 $\bar{\beta}_i \in \mathcal{U}_{m'}^{M'}$ トナル。

一方

$$\delta_{ij} \equiv \rho_i(p_j^{c_j}), \equiv 1(p_k^{c_k}) \quad (k \neq j, k=1, \dots, r)$$

$$\equiv 1(p^c) \quad (p \in M)$$

$$= \delta_{ij} \quad (i, j=1, \dots, r) \text{ 7 選べバ, (21) カラ}$$

$$\begin{cases} \delta_{ij} \equiv \gamma_{ij}^p(p_j^{c_j}) \quad (j=1, \dots, r; j \neq i) \\ \rho_i \equiv \prod_{j=1}^r \delta_{ij} \quad (m') \end{cases}$$

故 $\overline{\delta_{ij}} \in \mathcal{H}'_{m'}$ カラ $\overline{\delta_{ii}} = \overline{\rho_i} \prod_{j \neq i} \overline{\delta_{ij}}^{-1} \in \mathcal{H}'_{m'} \mathcal{C}_{m'}^{M'}$ トナル。

サテ $p_i (i=1, \dots, r)$ ハ $\mathbb{Z}/p$ デ分岐スルカラ
 $(f_{p_i} - 1)$. (22) ノ証明 $\equiv \Delta((\alpha), p_i) = 1, \alpha \equiv 1(m'_{p_i}^{-c_i})$
 $\equiv$ 成シテ

$$(23) \quad \overline{\alpha} \in \mathcal{H}'_{m'} \mathcal{C}_{m'}^{M'}$$

ヲ証明スレバヨイ。講座 p. 215 (11)。然ルニ $((\alpha_i), p_i) = 1$
 $\equiv$ 成シテ $(\overline{\alpha}_i : \overline{\alpha}_i^p) = p(p_i \times p)$ (講座 p. 212, (7),
 Ann. p. 410), 且 $\overline{\delta_{ii}} \neq \overline{\alpha}_i^p + \mathbb{Z}$ 故

$$(\overline{\alpha}^p)(\overline{\delta_{ii}}) = (\overline{\alpha})$$

トナル。上 $\overline{\delta_{ii}} \in \mathcal{H}'_{m'} \mathcal{C}_{m'}^{M'}$ ヲ証明シタカラ, 此レカラ
 (23) が成立スルコトガ明カル。

6

以上デ巡回拡大デ基本定理 $h(K/\mathbb{Q}) = (K:\mathbb{Q})$ が算術
 的ニ証明セラレタ。之レカラ後ハ Chevalley ノ紀要ノ方法

デ通メバヨイガ, Algebra 理論が自由 = 使フコトが許サ
レルナラバ, Hasse ノ 方法 / 方が自然デアルヤウ = 思ハ
レル。

其ノタメ = 先ヅ Normensatz: $\alpha \in k$ がスベテ p^c
ニツイテ巡回拡大 K/k ノ Normenrest デアレバ, α ハ
 K/k ノ Norm トナル。

何トナレバ, 巡回拡大 = 対シテ $k = \mathbb{Q}$ が成立シタカラ,
(12) カラ

$$(24) \quad \varphi_m \cap \mathcal{H}_m = N_{K/k} \varphi^{M'}(K),$$

$$(25) \quad \left\{ E^M(k) \cap S_m = N_{K/k} E^{M'}(K) \cap S_m \right.$$

が成立スル。今 α / (24) ナル α スベテ $M = \lambda$ レテオケバ,

$$\alpha \in E^M.$$

假定カラ $\alpha \in \varphi_m^M \cap \mathcal{H}_m$ ナル故 (24) カラ $\alpha \equiv N_{K/k} A(m),$
 $A \in E^{M'}(K)$

故 = $\alpha N_{K/k} A^{-1} \equiv 1(m), \alpha N_{K/k} A^{-1} \in E^M$ トナリ (25)

カラ $\alpha N_{K/k} A^{-1} = N_{K/k} B$ トナル。即チ $\alpha = N_{K/k} A B$ ト
ナル。——

故 = Hasse ノ 理論カラ (Math. Ann. 107) 各
Primstelle p = 対シテ Normenrestsymbol

$$\left(\frac{\alpha, K}{p} \right) \quad (\alpha \in k)$$

ガアーベル拡大 K/k = 對シテ定義サレ

$$(26) \quad \left(\frac{\alpha, K}{p} \right) = 1 \iff \alpha \equiv N_{K/k} A(p^c), \quad A \in K$$

(27) $\mathfrak{p}$ が K/k で分岐シナケレバ, Artin Symbol
 $\left(\frac{K}{\mathfrak{p}}\right) = \exists$ 11

$$\left(\frac{\alpha, K}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{K}{\mathfrak{p}}\right)^{-e}, \quad \mathfrak{p}^e \parallel (\alpha)$$

トイラハサレレ。

(28) Produktformel: $\prod_{\text{all } \mathfrak{p}} \left(\frac{\alpha, K}{\mathfrak{p}}\right) = 1$

以上カラ $\bar{\alpha} \bmod. m = \text{對シテ}$

$$\chi(\bar{\alpha}) = \prod_{\mathfrak{p} \in M} \left(\frac{\alpha, K}{\mathfrak{p}}\right)$$

ナル $\mathcal{R}_m$, in $\mathcal{O}_f(K/k) \rightarrow$ 對應ヲ考ヘルト, $\bar{\alpha} \in \mathcal{R}_m$,
 及び $\bar{\beta}$ ($\beta \in E^M$) = 對シテハ (26), (27), (28) カラ (K/k テ
 分岐スル $\mathfrak{p}$ ハ M = 入レテアルカラ)

$$\chi(\bar{\alpha}) = \prod_{\mathfrak{p} \in M} \left(\frac{\alpha, K}{\mathfrak{p}}\right) = \prod_{\mathfrak{p} \in M} 1 = 1,$$

$$\chi(\bar{\beta}) = \prod_{\mathfrak{p} \in M} \left(\frac{\alpha, K}{\mathfrak{p}}\right) = \prod_{\text{all } \mathfrak{p}} \left(\frac{\alpha, K}{\mathfrak{p}}\right) \cdot \prod_{\mathfrak{p} \notin M} \left(\frac{K}{\mathfrak{p}}\right)^{\vee} = 1$$

即チ $\chi(\bar{\alpha})$ ハ $\mathcal{R}_m / \mathcal{R}_m \mathfrak{f}_m^M$, in $\mathcal{O}_f(K/k) \rightarrow$ homo-
 morph + 對應トナル。

一方 $\S 1$ テ $\mathcal{R}_m / \mathcal{R}_m \mathfrak{f}_m^M \cong A_m / H_m$ ナル關係ヲ
 立テケカラ, $A \ni \alpha = \mathfrak{g}(\bar{\alpha}) = (\alpha)_M = \exists$ 11

$$\chi_0(\alpha) = \chi(\bar{\alpha})$$

= ヨッタ, A_m in $\mathcal{O}_f(K/k) \rightarrow$ homomorph + 對應
 ヲ考ヘレバ, コレガ A_m / H_m , in $\mathcal{O}_f(K/k) \rightarrow$ homo-

morph + 対応 + τ + ν .

$$\triangle A_m \ni \alpha = \prod_{p \in M} p^e \text{ とすれば, } \alpha = (\alpha)_M = \text{対して}$$

$$\chi_0(\alpha) = \chi(\alpha) = \prod_{p \in M} \left(\frac{\alpha, K}{p} \right)$$

$$= \prod_{\text{all } p} \left(\frac{\alpha, K}{p} \right) \prod_{p \notin M} \left(\frac{K}{p} \right)^e = \left(\frac{K}{\alpha} \right),$$

即ち $\chi_0(\alpha)$ と一般 / Artinsymbol $\left(\frac{K}{\alpha} \right)$ とが一致
スル。

χ 又ハ $\chi_0 = \chi$ ヲ $\alpha(K/k)$ 全体 = ウツサレルコトハ紀
要 p. 427 参照。即ち Isomorphiesatz. χ_0 と Artin-
symbol とノ一致カラ Primideal = ツイテ考へレバ
Zerlegungssatz.

1 最後 = 存在定理ノ証明ハ § 4, 5 ノ計算カラ講座ノ証明
ハ若干簡易化サレル。

* * * *

Ideal と idèle とノ関係, Ideal 群と idèle
ノ群とノ関係等ハ C. Chevalley: Generalization
de la théorie du corps de classes pour
les extensions infinies (Lyonville Journal
(1936)) デモサレテアル。以上ハソレ = 頼ツテ idèleノ
理論ヲ普通ノ Idealノ話 = 翻譯シタノデアルガ, 逆 =
以上ノ関係カラ Idealノ理論カラ idèleヘノ移リ変リ
ノ様子がワカル。

即ち $\mathcal{P}$ + ル 對應デ 與ヘラ レル (3) 1 式デ $M = \text{合マ}$
 レル $\mathcal{P}$ + 次第 = 増シテ行ク。極限トシテスベテノ $\mathcal{P}$ + 合ム
 標 = スレバ, E^M ハ k 1 元全体トナル。ソレテ $\mathcal{R}_m \cap m = \prod_{\mathcal{P}}^c$
 1 C + 順次 = $k = \text{スレバ}$, $\prod_{\mathcal{P}} K_{\mathcal{P}}^*$ + 生ジ, groupe de
 fondamental J_k トナル。従ツテ $\mathcal{R}_m$ + groupe de
 f トシテノ Norm トナル。カクシテ

$$A_{\mathcal{P}} / H_{\mathcal{P}} \cong J_k / k \cdot N_{k,k} J_k$$

トトレコトが推定サレル。

次 $\chi = \mathcal{R}_m / \varphi_m^M \cdot \mathcal{R}_m$ 1 $\sigma(K/k) \sim$ 1 Character
 χ :

$$\chi(\bar{\alpha}) = \prod_{\mathcal{P} \in M} \left(\frac{\alpha, Z}{\mathcal{P}} \right)$$

デ $m \rightarrow \infty$ トスレバ $J_k \ni \alpha = (\alpha_{\mathcal{P}_1}, \alpha_{\mathcal{P}_2}, \dots) = \text{對}$
 シテ

$$\chi(\alpha) = \prod_{\mathcal{P}_i} \left(\frac{\alpha_{\mathcal{P}_i}, Z}{\mathcal{P}} \right)$$

ト定義スレバヨイトイフコトが想像サレル。實際 = 之レ等ノ
 コトハ上ノ Chevalley 1 論文デ証明サレテキル。