OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	前号浅野氏談話878ニ関スルー注意　(部分体ノ Arithmetic ニツイテ)
Author(s)	中山, 正
Citation	全国紙上数学談話会. 1940, 203, p. 356-361
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74811
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

881. 前号浅野氏談話878ニ関スル
―注意（部分体ノ Arithmetic ニツイテ）

中山　正（阪大）

前号デ浅野氏ハ"アル体 K ノ上ノ normal-simple ナ多元環 $\mathfrak{A}$ ノ中デ「普通」ノ arithmetic ガ成立シテヰルナラバ K ノ中デモヤハリソウデアル。"コトヲ証明サレタ。

ソコノ証明デハ K ノ中ニアル valuation ガアルトキ，ソレガ $\mathfrak{A}$ デ「Zerlegen」シナイトイフ normal-simple algebra ニ特有ナ性質ガ使ハレテヰルコトハ容易ニワカル。

シカラバソレハ方法的ナ問題カ，或ヒハ本質的ニ必要ナコトカ，即チ normal-simple デナイ場合、特ニ Extension field デアル場合ハ如何デアルカ、ニツイテハ始メヨリ分リマセンデシタ。然シコノ場合、実際駄目デアルコトガ容易ナ例デ示サレタノデ一寸御報告シマス。

即チ、任意ノ体 k ニ二ツノ独立ナ変数 x, y ヲ添加シテ $K = k(x, y)$ ヲツクル．更ニ $\sqrt{x}$ ヲ添加シテ $L = K(\sqrt{x}) = k(\sqrt{x}, y)$ ヲツクル．L ハ K ノ二次ノ拡大体デアル。今 L ノ中デ

$$O = k(y+\sqrt{x})[y]$$

ナル整域ヲ先ヘル。（角カッコハ環添加ヲ表ハス）

ϑ ハトモカク体 $k(y+\sqrt{x})$ ノ上ノ y ノ多項式域デアルカラ、ソコデハ普通ノ arithmetic ガ成立ツ。シカルニ下ニ示ス如ク ϑ トK ノ Intersection ハ

$$\vartheta \cap K = k[x, y]$$

ニナル。ソウスレバソコデハ普通ノ arithmetic ハ成立シナイ。故ニ求メル例ニナル。（勿論下ノ体デ云々ハ上ノ整域トノ intersection ナル整域デノ意味デアルコトハ云フマデモナイ）

K ヘ ϑ ヲモトメルタメニ、K ノ任意ノ元ハ $\dfrac{F(x, y)}{G(x, y)}$ ナル形ニカケル。但シ $F(x, y)$, $G(x, y)$ ハ $k[x, y]$ ノ元デ、ソコニオイテ共通因子（＋常数）ヲモタヌモノトスル、他方 ϑ ノ元ハ $\dfrac{f(\sqrt{x}, y)}{g(\sqrt{x}+y)}$ ナル形ニカケル。

タダシ $f(\sqrt{x}, y) \in k[\sqrt{x}, y]$, $g(\sqrt{x}+y) \in k[\sqrt{x}+y]$, シカモ f トg ハ $k[\sqrt{x}, y]$ ニオイテ共通因子ヲフクマヌトシテヨイ。今上記両者ガ等シイトスル。即チ

$$\frac{F}{G} = \frac{f}{g} \quad \text{即チ} \quad F \cdot g = f \cdot G$$

シカルニ $F(x, y)$ ト $G(x, y)$ ハ $k[x, y]$ ニオイテ共通因子ヲモタヌノダカラ、$k[\sqrt{x}, y]$ ニオイテモ共通因子ヲモタヌ事ハ容易ニワカル。ヨッテ兎ニ角

$$F(x, y) = f(\sqrt{x}, y), \quad g(\sqrt{x}+y) = G(x, y)$$

トナル。シカルニ $\sqrt{x}+y$ ノ多項式ガ x, y ノ多項式ニナルノハ常數ノ時ダケデアル。故ニ我々ノ元、即チ $K\cap\mathfrak{O}$ ノ任意ノ元ハ x, y ノ多項式 $\in k[x, y]$ トナル。q.e.d.

注意： 單ニ L/K ノ L ニオイテ普通ノ arithmetic ガアルバカリデナク、ソノ整域 $\mathfrak{O}$ ガ L/K ニオケルソノ共軛ト一致スルナラバ $K\cap\mathfrak{O}$ デ普通ノ arithmetic ガ成立ツコトハ大シタ困難ナシニツカル。タゞシコヽニ L/K ハ galoissch トスル。（拡大スル方ハ arithmetic ガ保タレルコトガヨク知レテヰルノダカラ、拡大スル方ハヨイノデアリ、從ツテ galoissch ト仮定スルコトハ本質的ニハ何等影響ナイ。ソウデナイ場合ニ云ヒカヘルコトモ容易デアル）

〔追記〕 ソレナラバ、L/K ナル有限拡大体ニオイテ，L ノ整域 $\mathfrak{O}$ ガアルトキ $\mathfrak{O}\cap K$ デ普通ノ arithmetic ガ成立ツタメノ必要且ツ充分ナ條件ハ？

ソレハ、イサヽカ上ニ最後ニ述ベタコトカラ直グ出ルコトダガ、ソノタメニハ再ビ L/K ガ galoissch トシテ（上記注意參照）$\mathfrak{O}$ トソレノ共軛 $\mathfrak{O}', \mathfrak{O}'', \cdots\cdots$ ノ Intersection $\mathfrak{O}^*$ ニオイテ普通ノ arithmetic ガ成立ツコトガ必要且ツ充分デアル。

（証明） $\mathfrak{O}\cap K=\mathfrak{O}'\cap K=\mathfrak{O}''\cap K=\cdots\cdots$ デアル。從ツテコレハ同時ニマタ $=\mathfrak{O}^*\cap K$ デアル。今コヽデ普通ノ arithmetic ガ成立ツテヰルトスレバ、$\mathfrak{O}^*$ ハソレ（即チ $\mathfrak{O}^*\cap K$）ニ対シテ ganz-abhängig ナ L ノ元全

体デアル。何トナラバ $\mathfrak{o}^*$ ヘ K ニ対シテ ganz-abh. ナ元ハ $\mathfrak{o}, \mathfrak{o}', \mathfrak{o}'', \cdots\cdots$ ニ對シテ然リ。シタガッテソレ等ニ即チ $\mathfrak{o}^*$ ニ含マレル。他方 $\mathfrak{o}^*$ ノ元ノ共軛ノ整對称式ハ $\mathfrak{o}^*$ ヘ K ニ含マレルコト明カダカラ $\mathfrak{o}^*$ ノ元ハ $\mathfrak{o}^*$ ヘ K ニ對シテ ganz-abh. デアル。ヨッテ $\mathfrak{o}^*$ デ普通ノ arithmetic が成立ツ。

逆ハ上ニノベタコトカラ明カ。$\mathfrak{o}^*$ ハソノ共軛ト一致スルカラ。（コノ必要充分條件ヲ使ヘバ前記反例ノ別証モ得ラレル。スナハチ、ソコノ $\mathfrak{o}$ トソノ共軛 $\mathfrak{o}'$ ノ Intersection ハソコノ論法ト類似ノ論法デ $k[\sqrt{x}, y]$ ナルコトガワカリ、ソコデハ普通ノ arithmetic が成立タナイ）。

ナホ、前ニ述ベ且ツ上ニ使ッタ共軛ト一致スル場合云々ハ浅野サンハヤハリ前号 878 ト同ジ様ナ方法デ証明サレタガ、以下ニ一ツノ別証ヲ述ベテミル。

先ヅ $\mathfrak{o}$ ニオイテ普通ノ arithmetic が成立ツコトハ

1. L ノ中ニ適當ナ valuations ノ system $\mathfrak{P}$ ガアリ、$\mathfrak{o}$ ガソノ valuations rings ノ intersection.
2. $\mathfrak{P}$ ハミナ discrete.
3. 任意ニ有限個ノ Stellen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \cdots\cdots \mathfrak{P}_n$ 及ビソレニ対應シテ L ノ元 $a_1, \cdots\cdots a_n$ ガ與ヘラレタトキ、$\mathfrak{P}_1, \cdots\cdots, \mathfrak{P}_n$ ニオイテハ $a_1, \cdots\cdots, a_n$ ニ充分近ク、シカシテ他ノ Stellen デハ ganz

ニナル如キLノ数ガ存在スル。

ト同値デアル。(コノ formulation ハ Artin カラ聞イタノデスガ非常ニ便利デアル。特ニ拡大体(下カラ上ヘ)ヲ論ズルトキ idealtheoretisch ニヤルヨリハズット便利ノヤウニ思フ。ナホ,カウシタ行キ方ノモット一般ノ場合ニツイテハ守屋氏ガ北大紀要ニ書イテ居ラレル)。

ヨッテ今 $\mathfrak{o}$ ガソノ共軛ト一致スレバ,アル $\mathfrak{p}$ ト共軛ナ valuation ハヤハリ上ノ system ノ中ニフクマレテヰルコトハ明カデアル。

更ニKニオイテ $\mathfrak{p}$ デ induce サレタ valuations ノ(中デ(本質的ニ)異ルモノノ)ナス system ϕ_σ デ考ヘル。ソレラハ勿論 discrete ダカラ、ソレニツイテ3ニ相当スルコトガ云ヘレバ目的ガ達セラレル。先ヅL/Kが separable ノ場合、コノ時Kノ任意ノ元ハLノ元ノSpurデアル。

今一ツノ ϕ ガ與ヘラレタトキ,ソレヲ割ル(互ニ共軛ナ) $\mathfrak{p}$ ニツイテソノLノ元ヲ適當ニ近似スレバソノSpurハ與ヘラレタKノ元ニ ϕ デ充分近イ。故ニ3.ノ性質が $\{\phi_\sigma\}$ ニツイテ保持サレルコトガ容易ニワカル。次ニ rein-inseparabel ノ場合。KノCharacteristic ヲ p トシテLノ元ヲ p^e 乗スレバミナKニ入ルトスル。今Kノ中ニ近似サルベキ n 個ノ元ガ與ヘラレタトシテ、ソレノ p^e 乗根ヲミナLニ添加シタ体 L^* ヲ考ヘル。コヽデ普通ノ arithmetic ガ成立ッテヰル。ヨッ

テ、ソレラ p^e 乗根ヲ L^* ノ中デ近似スレバヨイ。(L^* 元ハマハリ p^e 乗スレバミナ K ノ中ニ入ルコトニ注意セヨ)。

上記両者ヲ合セレバ一般ノ場合ガ出来ル。