OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	Algebra二於ケル Arithmetik ニツイテ II
Author(s)	浅野, 啓三
Citation	全国紙上数学談話会. 1940, 203, p. 361-367
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74812
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

882. Algebra = 於ケル Arithmetik = ツイテ II

浅野 啓三 (阪大)

§3

前号ノ論文デ einfache Algebra ヶノ中デ Arithmetik ガ定義サレテホルナラバ，ヶノ Zentrum K ノ中デモ Arithmetik ガ成立シ，ヶ = 於テ単ナラレタル Arithmetik ハコノ K ノ Arithmetik ヲ拡張シタモノデアルコトヲ示シタ。証明中ヶノ maximal-ordnung ヲ大文字 O デ示シ，O トK ノ共通分 [O, K] ヲ小文字 o デ示シタノデアッタガ、印刷デハ両者ノ区別ガ出来テ居ラズ，大変見苦シイコトニナッテシマッタ。§2 ニ於テハ ヶ = 於ケル Ideal ハドイツ大文字，K = 於ケル Ideal ヘドイツ小文字ト云フコトニ訂正スル。

ヶヲ Körper K ノ上ノ normal-einfache

algebraトスル。$\mathfrak{r}$ノTeilring $\mathfrak{o}$ガ1ヲ含ミ，且ツ$\mathfrak{r}$ノ任意ノ元αニ對シ，$\alpha\alpha \in \mathfrak{o}$トナル$[\mathfrak{o}, K]$ノ元$\alpha \neq 0$ガ存在スレバ$\mathfrak{o}$ハ勿論$\mathfrak{r}$ノOrdnungデアル。今Ordnungガ此ノヤウナ強イ條件ニ從フモノトスルト次ノ事実ガ成立スル。

定理 $\mathfrak{r}$ニ於ケル zweiseitige $\mathfrak{o}$-Ideale ガ群ヲナスナラバ，[1] $I = [\mathfrak{o}, K]$ニ於テ普通ノ Arithmetik ガ成立シ，$\mathfrak{o}$ハIニ關シ algebraisch ganz ナル$\mathfrak{r}$ノ元ヨリナル maximaler Ring デアル。

（証明） 1°. KハIノ Quotientenkörper デアル。

2°. Iニ於テ普通ノ arithmetik ガ成立スルナラバ上ノ定理ハ成立スル。Iニ關シ alg. ganz ナル$\mathfrak{r}$ノ元ヨリナル Maximalordnung ノ一ツヲ$\mathfrak{o}^*$トスレバ，$\mathfrak{o}\mathfrak{o}^*$ハ $\mathfrak{o}$-Linksideal デアッテ$\mathfrak{o}\mathfrak{o}^* \subseteq \mathfrak{o}$トナル$I$ノ元$\lambda$ガ存在スル。$\mathfrak{o}\mathfrak{o}^*$ノ Rechtsordnung ヲ$\mathfrak{o}_1$トスレバ$\mathfrak{o}_1 \supseteq \mathfrak{o}^*$．又

---

1) $\mathfrak{r}$ニ於ケル$\mathfrak{o}$-Ideal ガ群ヲナス次ノ條件ハ

I $\mathfrak{o}$ガ Maximalordnung

II $\mathfrak{o}$ニ含マレル$\neq$. $\mathfrak{o}$-Ideal ニ關スル Teilerkettensatz.

III $\mathfrak{o}$ノ Primideal ハ（zweiseitig）teilerlos.

$$\mathfrak{O}_1 \subseteq \mathfrak{O}\mathfrak{O}^*\mathfrak{O}_1 = \mathfrak{O}\mathfrak{O}^* \qquad \mathfrak{O}_1\lambda \subseteq \mathfrak{O}$$

$$\mathfrak{O}\mathfrak{O}^*\lambda\mathfrak{O} \subseteq \mathfrak{O}\mathfrak{O} = \mathfrak{O}_1 \qquad \lambda\mathfrak{O} \subseteq \mathfrak{O}_1$$

前論文 33 ノ頁ト同様ニシテ $\mathfrak{O}_1 \neq \mathfrak{O}^*$ ナラバ $\mathfrak{O} \supset \mathfrak{p}^{-1}$ トナル I ノ Primideal $\mathfrak{p}$ ガ存在スル。

$$I = [\mathfrak{O}^*, K] \subseteq [\mathfrak{O}_1, K] = I_1$$

然ルニ $\mathfrak{O}_1\lambda \subseteq \mathfrak{O}$ ヨリ $[\mathfrak{O}_1\lambda, K] \subseteq [\mathfrak{O}, K]$，即チ

$$I_1\lambda \subseteq I$$

従ッテ $\mathfrak{O}I_1$ ハ $\mathfrak{O}$ ト äquivalent ナ Ordnung ヲナシ，$\mathfrak{O}I_1 = \mathfrak{O}$，$I_1 \subset \mathfrak{O}$，$I_1 \subseteq I$ トナル．ヨッテ $I = I_1$．故ニ

$$\mathfrak{O}_1 \supset \mathfrak{p}^{-1} \quad ヨリ \quad I \supseteq \mathfrak{p}^{-1}$$

トナッテ矛盾ヲ生ズル。

3°. $\mathfrak{p}$ ヲ $\mathfrak{O}$ ノ Primideal トスル．$\mathfrak{p}$ ト Prim ナル ganzes ヌ．$\mathfrak{O}$-Ideal $\mathfrak{C}$ ヲ適當ニ取レバ

$$\mathfrak{C}a \subseteq \mathfrak{O} \quad (従ッテ又\ a\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{O})$$

トナル如キ $\mathfrak{r}$ ノ元 a ノ全体ヲ $\mathfrak{O}_{\mathfrak{p}}$ トスル。$\mathfrak{O}_{\mathfrak{p}}$ ハ $\mathfrak{r}$ ノ Ordnung デ $\mathfrak{r}$ ニ於ケル zweiseitiges $\mathfrak{O}_{\mathfrak{p}}$-Ideal ハ群ヲナス。又 $[K, \mathfrak{O}_{\mathfrak{p}}]$ ハ Hauptideal-ring $I_{\mathfrak{p}}$ ヲ作ル。

以下 334—345 頁ニ於ケルト同様ニシテ定理ガ証明サレル。

上ノ定理ヨリ

$\boxed{定理}$ $\mathfrak{r}$ ヲ algebra トシ，$\mathfrak{O}$ ヲ $\mathfrak{r}$ ノ任意ノ元 x ニ對シ $x\alpha \in \mathfrak{O}$ トナル $\mathfrak{O}$ ノ Zentrum ニ属ス

ル正規元よが存在スル如キ $\mathfrak{o}$ ノ Ordnung トスル。
$\mathfrak{o}$ ニ於ケル zweiseitiges $\mathfrak{o}$-Ideal が群ヲナス
ナラバ，此ノ群ヲ Gruppoid ニ拡張シテ $\mathfrak{o}$ ノ
Arithmetik ヲ定義スルコトが出来ル。

§4

可換体 L が部分体 K ノ有限次拡大体ナルトキ，L ニ於テ Arithmetik が定義サレテ居テモ，K ニ於テハ必ズシモ Arithmetik が成立シナイコトハ中山君ノ注意サレテ居ル通リデアル。L ニ於テ $\mathfrak{O}$ ヲ Maximal-ordnung トシテ Arithmetik が成立シ，且ツ K ニ於テ $I=[K, \mathfrak{O}]$ ヲ Maximalordnung トシテ Arithmetik が成立スル場合デモ，$\mathfrak{O}$ が I ニ関シテ alg. ganz ナル L ノ元ヨリ成ルトハ限ラナイ。若シ I ニ於テ普通ノ Arithmetik が成立シ，且ツ $\mathfrak{O}$ が I ニ関シ alg. ganz ナル L ノ元全体ヨリ成ルナラバ，L ヲ含ム K ノ上ノ最小 galois 拡大体ヲ L^* トシ，L^* ノ元デ $\mathfrak{O}$ ニ関シ alg. ganz ニナルモノノ全体ノ $\mathfrak{O}^*$ トスレバ，$\mathfrak{O}^*$ ハ K ニ関シ alg. ganz ナル L^* ノ元ノ全体デアリ，且ツ $\mathfrak{O}^*$ ニ於テモ普通ノ Arithmetik が成立スル。（コノトキ L/K ハ separabel デモ inseparabel デモヨイ）又 L^*/K ノ凡テノ Automorphismus S ニヨッテ $\mathfrak{O}^S=\mathfrak{O}^*$ トナル。コレハ周知ノ事デアルガ，更ニコノ逆ノ事実が成立スル。上ヘ拡張スル方ハ常ニ可能

デアルカラ L/K が galoissch ノ場合ニ証明スレバヨイ。即チ

$$\begin{matrix} L \supset K \\ \mathfrak{O} \supset I \end{matrix} \qquad I=[\mathfrak{O},K],\ L\ ハ\ \mathfrak{O}\ ノ\ Quotientenkörper$$

トシ，L/K が galoissch.(separabel od. inseparabel) デ L/K ノ任意ノ Automorphismus S ヨッテ $\mathfrak{O}^S=\mathfrak{O}$ トナルモノトスル。$\mathfrak{O}$ ニ於テ普通ノ Arithmetik が成立スレバ I ニ於テモサウデアリ，且ツ $\mathfrak{O}$ ハ I ニ関シ alg. ganz ナル L ノ元全体ヨリ成ル。

（証明）1° K ハ I ノ Quotientenkörper デアル。$a\in K$ トスレバ $a\alpha\in\mathfrak{O}$ トナル $\mathfrak{O}$ ノ元 α が存在スル。α ノ共軛 $\alpha',\alpha'',\cdots\cdots,\alpha^{(n-1)}$ ハ $\mathfrak{O}$ ニ属スル。（L/K が inseparabel ノ時ハ適当ニ重複サセル）。故ニ

$$a\alpha\alpha'\cdots\cdots\alpha^{(n-1)}=ab\in\mathfrak{O},\quad b\in[\mathfrak{O},K]=I$$

$$c=ab\in I,\quad a=\frac{c}{b}$$

2° K ノ I-Ideale ハ群ヲナス。

$\mathfrak{a}$ ヲ任意ノ I-Ideal トスル。

$$\mathfrak{a}(\mathfrak{a}\mathfrak{O})^{-1}=(\mathfrak{a}\mathfrak{O})(\mathfrak{a}\mathfrak{O})^{-1}=\mathfrak{O}$$

故ニ $a_1\alpha_1+\cdots\cdots+a_r\alpha_r=1,\ a_i\in\mathfrak{a}\quad \alpha_i\in(\mathfrak{a}\mathfrak{O})^{-1}$

$$1=\prod_{i=0}^{n-1}\left(a_1\alpha_1^{(i)}+\cdots\cdots+a_r\alpha_r^{(i)}\right)=\sum c_{\nu_1\cdots\nu_r}a_1^{\nu_1}\cdots\cdots a_r^{\nu_r}$$

$\mathfrak{p}$ ヲ $\mathfrak{O}$ ノ Primideal トシ，又 $\mathfrak{p}$ ganz ナル L ノ元ノナス整域ヲ $\mathfrak{O}_{\mathfrak{p}}$ トシ，$I_{\mathfrak{p}}=[K,\mathfrak{O}_{\mathfrak{p}}]$ トスル。

$I_{\mathfrak{p}}$ ハ $\mathfrak{p}$-adische Bewertung = 関シ ganz + ル K ノ元ノナス Ring デアルカラ例論普通ノ Arithmetik ガ成立スル。

$\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{o} I_{\mathfrak{p}}$, $O^* = O I_{\mathfrak{p}}$ トオク。

$\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}^{-1} \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}} = I_{\mathfrak{p}}$, $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}} (\mathfrak{o} O)^{-1} I_{\mathfrak{p}} = O^*$,

$(\mathfrak{o} O)^{-1} I_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}^{-1} O^*$

$I_{\mathfrak{p}} \subset O^* \subseteq O_{\mathfrak{p}}$, $I_{\mathfrak{p}} \subseteq [O^*, K] \subseteq [O_{\mathfrak{p}}, K] = I_{\mathfrak{p}}$

故ニ $[O^*, K] = I_{\mathfrak{p}}$

$\alpha_\nu \in (\mathfrak{o} O)^{-1} \subseteq \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}^{-1} O I_{\mathfrak{p}}$, $\alpha_\nu^{(i)} \in \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}^{-1} O I_{\mathfrak{p}}$

$c_{\nu_1 \cdots \nu_n} \in \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}^{-n} O^*$ 且 $\in K$

$c_{\nu_1 \cdots \nu_n} \in [\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}^{-n} O^*, K] = \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}^{-n}$ (2)

コレヨリ $D_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}^{-n}) \mathfrak{o}^n = I$ トナリ, $\mathfrak{o}$ ハ unbetrbar ニナル。

3°. O ハ I ニ関シ alg. ganz ナル L ノ元全体ヨリ成ル。

I ニ関シ alg. ganz ナル L ノ元全体ヲ O^* トスル。明カニ

---

(2) $[\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}^{-n} O^*, K] \supseteq \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}^{-n}$, $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}^{n} [\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}^{-n} O^*, K] \subseteq [\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}^{n} \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}^{-n} O^*, K]$

$\subseteq [O^*, K] = I_{\mathfrak{p}}$

ヨッテ $[\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}^{-n} O^*, K] \subseteq \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}^{-n}$

$$I \subset \mathfrak{o}^* \subseteq \mathfrak{o}$$

$\mathfrak{o}$ キ $\mathfrak{o}^*$ トハルト、$\mathfrak{o}$ ハ $\mathfrak{o}^*$ ト共ル ganzes $\mathfrak{o}^*$-Ideal ノ逆 $\mathfrak{a}^{*-1}$ ヲ有スル。L/K ガ separabel +ラバ $\mathfrak{a}^{*\gamma}$ ノ共軛ハ皆 $\mathfrak{o}$ ニ含マレル、従ッテ

$$\mathfrak{o} \supset N(\mathfrak{a}^{*-1}) = N(\mathfrak{a}^*)^{-1} = \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{o}^*$$

$$I \supset \mathfrak{a}^{-1} \quad (\mathfrak{a}^{-1} \text{ nicht ganz})$$

トナリ矛盾ヲ生ズル。L/K が rein inseparabel ノ時ハ

$$\mathfrak{a}^{*m} = (\alpha_1, \cdots\cdots, \alpha_r)^m = (\alpha_1^m, \cdots\cdots, \alpha_r^m)$$

ヨリ $\mathfrak{a}^*$ ノ適当ナ素数羃ガ I-Ideal カラ生成サレルコトガ分リ、同様ナ結果ニ達スル。一般ノ場合ハコレヲ組合スレバヨイ。