



Title	Algebraニ於ケル Arithmetik ニツイテ Ⅱ
Author(s)	浅野, 啓三
Citation	全国紙上数学談話会. 1940, 203, p. 361-367
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74812
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

882. Algebra = 於ケル Arithmetik = ツイテ II

浅野 啓三 (阪大)

§ 3

前号ノ論文デ *einfache Algebra* $\mathcal{A}$ ノ中デ *Arithmetik*ガ定義サレテキルナラバ、 $\mathcal{A}$ ノ *Zentrum* K ノ中デモ *Arithmetik*ガ成立シ、 $\mathcal{A} =$ 於テ與ヘラレタル *Arithmetik*ハ、コノ K ノ *Arithmetik*ヲ拡張シタモノデアルコトヲ示シタ。証明中 $\mathcal{A}$ ノ *maximal-ordnung*ヲ大文字 $\mathcal{O}$ ヲ示シ、 $\mathcal{O}$ ト K ノ共通分 [$\mathcal{O}, K$]ヲ小文字 o ヲ示シタノデアツタガ、印刷デハ両者ノ區別ガ出来テ居ラズ、大変見苦シイコト = ナツテマッタ。

§ 2 = 於テハ $\mathcal{A} =$ 於ケル *Ideal* ハドイツ大文字、 $K =$ 於ケル *Ideal* ハドイツ小文字ト云フコト = 訂正スル。

$\mathcal{A}$ ヲ *Körper* K ノ上ノ *normal-einfache*

algebra トスル。 $\mathcal{R}$, Teiltring $\mathcal{O}$ が 1 を含み、
 且 $\mathcal{R}$ の任意ノ元 x = 對シ、 $x \neq 0 \in \mathcal{O}$ トナル $[\mathcal{O}, K]$
 ノ元 $\alpha \neq 0$ が存在スレバ $\mathcal{O}$ ハ勿論 $\mathcal{R}$ ノ Ordnung
 ナアル。今 Ordnung が此ノヤウナ強イ條件 = 従フモ
 ノトスルト次ノ事實が成立スル。

定理 $\mathcal{R}$ = 於ケル zweiseitige $\mathcal{O}$ -Ideale
 が群ヲナスナラバ、⁽¹⁾ $I = [\mathcal{O}, K]$ = 於テ普通ノ Arithme-
 tika が成立シ、 $\mathcal{O}$ ハ I = 關シ algebraisch ganz
 ナル $\mathcal{R}$ ノ元ヨリナル maximaler Ring ナアル。

(証明) 1°. K ハ I ノ Quotientenkörper ナ
 アル。

2°. I = 於テ普通ノ Arithmetika が成立スルナラ
 バ上ノ定理ハ成立スル。 I = 關シ alg. ganz ナル $\mathcal{R}$ ノ
 元ヨリナル Maximalordnung ノ一ツヲ $\mathcal{O}^*$ トスレ
 バ、 $\mathcal{O}\mathcal{O}^*$ ハ $\mathcal{O}$ -Linksideal ナアツテ $\mathcal{O}\mathcal{O}^* \lambda$
 $\subseteq \mathcal{O}$ トナル I ノ元 λ が存在スル。 $\mathcal{O}\mathcal{O}^*$ ノ Rechts-
 ordnung $\gamma \mathcal{O}$ トスレバ $\mathcal{O}_1 \supseteq \mathcal{O}^*$ ナ

4) $\mathcal{R}$ = 於ケル 2. $\mathcal{O}$ -Ideal が群ヲナスルノ條件ハ

- I $\mathcal{O}$ が Maximalordnung
- II $\mathcal{O}$ = 含マレル 2. $\mathcal{O}$ -Ideal = 關スル Teiler-
kettensatz.
- III $\mathcal{O}$ ノ Primideal ハ (zweiseitig)
teilerlos.

$$\sigma_1 \subseteq \sigma \sigma^* \sigma_1 = \sigma \sigma^* \quad \sigma_1 \lambda \subseteq \sigma$$

$$\sigma \sigma^* \lambda \sigma \subseteq \sigma \sigma = \sigma, \quad \lambda \sigma \subseteq \sigma_1$$

前論文 33 / 頁ト同様ニシテ $\sigma_1 \neq \sigma^* + \text{ラベ}$ $\sigma \supset \mathfrak{P}^{-1}$ ト
 +ル I / *Primideal* $\mathfrak{P}$ が存在スル。

$$I = [\sigma^*, K] \subseteq [\sigma_1, K] = I_1$$

然レ $\sigma_1 \lambda \subseteq \sigma$ ヨリ $[\sigma_1 \lambda, K] \subseteq [\sigma, K]$, 即チ

$$I_1 \lambda \subseteq I$$

従ツテ σI_1 ハ σ ト äquivalent + Ordnung γ
 +ル, $\sigma I_1 = \sigma$, $I_1 \subset \sigma$, $I_1' \subseteq I$ ト+ル。ヨツテ $I = I_1$ 。
 故ニ

$$\sigma_1 \supset \mathfrak{P}^{-1} \quad \text{ヨリ} \quad I \supseteq \mathfrak{P}^{-1}$$

ト+ッテ矛盾ヲ生ズル。

3°. γ_p γ σ / *Primideal* トスル。 γ_p ト *Prim*
 +ル *ganzes* $\mathbb{Z}$. σ -*Ideal* $\subset \gamma$ 適當ニ取レバ

$$\subset a \subseteq \sigma \quad (\text{従ツテ又 } a \subset \subseteq \sigma)$$

ト+ル如キ γ / 元 a / 全体ヲ σ_{γ_p} トスル。 σ_{γ_p} ハ γ /
Ordnung γ γ = 於ケル *zweiseitiges* σ_{γ_p} -
Ideal ハ群ヲ+ス。又 $[K, \sigma_{\gamma_p}]$ ハ *Hauptideal-*
ring I_{γ_p} ヲ作ル。

以下 334—345 頁ニ於ケルト同様ニシテ定理ヲ証明
 サレル。

上ノ定理ヨリ

定理 γ γ *algebra* トシ, σ γ / 任意

1元 α = 對シ $\alpha \alpha \in \sigma$ ト+ル σ / *Zentrum* = 爲ス

ル正規元 α が存在スル如キ R の *Ordnung* トスル。
 R = 於ケル *zweiseitiges O-Ideal* が群ヲナス
 ナラバ、此ノ群ヲ *groupoid* - 拡張シテ R /
Arithmetik ヲ定義スルコトが出来ル。

§ 4

可換体 L が部分体 K / 有限次拡大体ナルトキ、 L =
 於テ *Arithmetik* が定義サレテ居テモ、 K = 於テハ必
 ズシモ *Arithmetik* が成立シナイコトハ中山君ノ注意
 サレテ居ル通りデアル。 L = 於テ O ヲ *Maximal-*
ordnung トシテ *Arithmetik* が成立シ、且ツ K =
 於テ $I = [K, O]$ ヲ *Maximalordnung* トシテ
Arithmetik が成立スル場合デモ、 O が I = 関シテ
alg. ganz ナル L ノ元ヨリ成ルトハ限ラナイ。若シ
 I = 於テ普通ノ *Arithmetik* が成立シ、且ツ O が I =
 関シ *alg. ganz* ナル L ノ元全体ヨリ成ルナラバ、 L ヲ
 含ム K ノ上ノ最小 *galois* 拡大体ヲ L^* トシ、 L^* ノ元
 ヲ O^* = 関シ *alg. ganz* = ナルモノノ全体ノ O^* トスレ
 バ、 O^* ハ K = 関シ *alg. ganz* ナル L^* ノ元ノ全体デア
 リ、且ツ O^* = 於テモ普通ノ *Arithmetik* が成立スル。
 (コノトキ L/K ハ *separabel* デモ *inseparabel*
 デモヨイ) 又 L^*/K ノ凡テノ *Automorphismus* S
 = ヨツテ $O^{*S} = O^*$ トナル。コレハ周知ノ事デアルが、
 更ニコノ逆ノ事案が成立スル。上ヘ拡張スル方ハ常ニ可能

デアレカラ L/K が *galoissch* / 場合 = 証明スレバ
ヨイ。即チ

$$\begin{array}{l} L \supset K \\ \mathcal{O} \supset I \end{array} \quad I = [\mathcal{O}, K], \quad L \text{ は } \mathcal{O} \text{ の Quotientenkörper}$$

トシ, L/K が *galoissch* (*separabel* od. *inseparabel*) デ L/K / 任意 / Automorphismus $S =$
ヨツテ $\mathcal{O}^S = \mathcal{O}$ トナルモ / トスル。 $\mathcal{O}$ = 於テ普通 /
Arithmetik が成立スレバ I = 於テモ サラデアリ, 且
ツ $\mathcal{O}$ は I = 関シ *alg. ganz* ナル L / 元全体ヨリ
成ル。

(証明) 1° K は I / Quotientenkörper デアル。
 $a \in K$ トスレバ $a \alpha \in \mathcal{O}$ トナル $\mathcal{O}$ / 元 α が存在スル。
 α / 共軛 $\alpha', \alpha'', \dots, \alpha^{(n-1)}$ は $\mathcal{O}$ = 属スル。 (L/K が
inseparabel / 特ハ適省 = 重複サセル)。故 =

$$a \alpha \alpha' \dots \alpha^{(n-1)} = a b \in \mathcal{O}, \quad b \in [\mathcal{O}, K] = I$$

$$c = a b \in I, \quad a = \frac{c}{b}$$

2° K / I -Ideale ハ群ヲナス。
 $\mathfrak{o}$ ヲ任意 / I -Ideal トスル。

$$\mathfrak{o}(\mathfrak{o} \mathcal{O})^{-1} = (\mathfrak{o} \mathcal{O})(\mathfrak{o} \mathcal{O})^{-1} = \mathcal{O}$$

故 = $a_1 \alpha_1 + \dots + a_r \alpha_r = 1, \quad a_i \in \mathfrak{o} \quad \alpha_i \in (\mathfrak{o} \mathcal{O})^{-1}$

$$1 = \prod_{i=0}^{n-1} (a_1 \alpha_1^{(i)} + \dots + a_r \alpha_r^{(i)}) = \sum c_1 \dots c_r a_1^{v_1} \dots a_r^{v_r}$$

$\mathfrak{p} \ni \mathcal{O}$ / Primideal トシ, zu $\mathfrak{p}$ ganz ナル L
元 / ナス整域 $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ トシ, $I_{\mathfrak{p}} = [K, \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}]$ トスル。

I_p は p -adische Bewertung = 関シ ganz +
 K / 元 / + π Ring テアルカラ勿論普通 / Arithme-
 tik が成立スル。

$$\sigma_p = \sigma I_p, \quad \sigma^* = \sigma I_p \text{ トオツ。}$$

$$\sigma_p^{-1} \sigma_p = I_p, \quad \sigma_p (\sigma \sigma)^{-1} I_p = \sigma^*,$$

$$(\sigma \sigma)^{-1} I_p = \sigma_p^{-1} \sigma^*$$

$$I_p \subset \sigma^* \subseteq \sigma_p, \quad I_p \subseteq [\sigma^*, K] \subseteq [\sigma_p, K] = I_p$$

$$\text{故} = [\sigma^*, K] = I_p$$

$$\alpha_i \in (\sigma \sigma)^{-1} \subseteq \sigma_p^{-1} \sigma I_p, \quad \alpha_i^{(i)} \in \sigma_p^{-1} \sigma I_p$$

$$c_1, \dots, c_r \in \sigma_p^{-n} \sigma^* \text{ 且 } \in K$$

$$c_1, \dots, c_r \in [\sigma_p^{-n} \sigma^*, K] = \sigma_p^{-n} \quad (2)$$

$$\text{コレヨリ } D_p(\sigma_p^{-n}) \sigma^n = I \text{ ト + 11, } \sigma \text{ は umkehrbar} \\ = + 12.$$

3°. σ は I = 関シ alg. ganz + L / 元全体ヨリ
 成ル。

I = 関シ alg. ganz + L / 元全体ヲ σ^* トスル。
 明カ =

$$(2) [\sigma_p^{-n} \sigma^*, K] \supseteq \sigma_p^{-n}, \quad \sigma_p^n [\sigma_p^{-n} \sigma^*, K] \subseteq [\sigma_p^n \sigma_p^{-n} \sigma^*, K]$$

$$\subseteq [\sigma^*, K] = I_p$$

$$\exists \text{ ヲテ } [\sigma_p^{-n} \sigma^*, K] \subseteq \sigma_p^{-n}$$

$$I \subset \mathcal{O}^* \subseteq \mathcal{O}$$

$\mathcal{O}$ は $\mathcal{O}^*$ に対し $\mathcal{O}$ は $\mathcal{O}^*$ に対し ganzes $\mathcal{O}^*$ -Ideal
 の逆 $\mathcal{O}^{*-1}$ を有する。 L/K が separabel ならば $\mathcal{O}^{*-1}$
 の共軛は皆 $\mathcal{O}$ を含み、従って

$$\mathcal{O} \supset N(\mathcal{O}^{*-1}) = N(\mathcal{O}^*)^{-1} = \mathcal{O}^{-1} \mathcal{O}^*$$

$$I \supset \mathcal{O}^{-1} \quad (\mathcal{O}^{-1} \text{ nicht ganz})$$

となり矛盾を生ずる。 L/K が rein inseparabel の
 時は

$$\mathcal{O}^{*m} = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)^m = (\alpha_1^m, \dots, \alpha_r^m)$$

より $\mathcal{O}^*$ の適当な素数個が I -Ideal から生成されること
 が分り、同様の結果を得る。一般の場合にこれを組合せ
 る。