



Title	Pythagorian ring ニ付イテ, III
Author(s)	吉田, 耕作
Citation	全国紙上数学談話会. 1940, 203, p. 368-374
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74813
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

883. Pythagorean ring = 付イテ, III

吉田 耕作 (改大)

Pythagorean ring の公理, 特 = "positiveness
ノ公理" が外見上, 最近 announce サレタ M. Stone⁽¹⁾,
ソレヨリ強ク見エナイカト三林氏 = 御注意ヲ頂イタノデ, 此
機會 = Stone トノ關係特 = P. R. が Stone ノヲ含ムコト
等述ベテヲキタイ。

Stone ノ公理及ビ結果ハ後ニ述ベルコト = シテ先ヅ次ノ
点ヲ強調シトキマセウ。Stone ハ "boundedness" —
後述 — ヲ假定シテルタメニ考ヘタル ring が特 = "linear
metric space" = ナル。從ツテコノ "conjugate
space" が使ヘル。ソウスレバ ring ノ "具體的ニ表現"
ハ ring ノ要素各々ヲ "適當ニトツタ conjugate space
ノ部分集合" ノ上ノ函數ト考ヘルコト = ヲツテ得ラレル。此
ノ principle ハ, モトモト Banach ト Mazur が
"任意ノ可分ノ Banach space ハ Banach space
(C) ノ部分線狀空間ト表ハセル" = 用ヒタモノデアツテ,
最近角谷君々 Russian school ノ人々が之レ = semi-
order トカ其ノ他種々ノ條件ヲ附シテ具體的表現ノ有用ヲ
武器ニ使ヘルコトヲ示シタノデアアル。此ノ鮮カヲ principle
ガアル以上, "具表" ノ問題ハ linear metric space
ノトキハ spectral theorem ヲ離レテ論ジラレルト云フ

(1) Proc. Nat. Acad., 26(1940), 280—283

点デ易シクナツテ了ツタ譯デアル。——表現シテ了ヘバ(例ヘバ (C)ノ場合ハ駄目ナコト明カダガ) *spectral theorem*ヲ出スノハ階段函数ノ多項式近似ニモツテユケルトキハ明カニワケハナイ。(或ハ "*semi-ordered modul*"ノトキハ多項式ハ使ヘナイガ、H. Freudenthal 流ニヤレル。此ノ場合ハ結局"具表"ト *operational calculus*トハ別ノ話ニナル。)

之レガ又 *Stone*ノ行キ方デモアルラシイ。証明シテナイノデハッキリワカリマセンガ。序デナガラ最近 C. R. URS Sニ出タ Krein⁽¹⁾ノ論文"内部的性質ニヨル (C)ノ特徴付ケ"モ此ノ方針ラシク、ソナラ既ニ角谷君ノ得タ結果"學士院記事 16 (1940), 63—67"ニ一致スルワケデアリマス。勿論 Kreinハ角谷君ノ論文ヲ知ラナイノデアリマセシガ。

以上ノ次第デ *linear metric* デナイ場合、例ヘバ"可測函数全体ノ空間ノ特徴付ケ"等ノ場合ハ話ガ用ニナル。*Pythagorean ring*ハ *metric axiom* (*topological axiom* 廿ハモ)ヲ假定セズニ云ハベ *ring-lattice* 論的ニ *spectral theorem* ト"可測函数ノ空間"トヲ取扱ヒタイタメニ考ヘタ訳デアリマシタ。

§1. *Pythagorean ring*ノ公理

談話 873ニ述ベタ公理ハ一寸誤リモアリ、又談話 875

(1) C. R. URS S, 27 (1940), 427—430

ニ述ベタ公理 iv) / 廢棄ト云フ所ヲ述ベタ所モ筆が込リス
 キタマウデス⁽¹⁾カラ、今一度公理ヲ訂正シナガラ述ベテ オキマ
 ス。談話 873 ニ於ケルヨリ *practical* = 使ヒヨイ形ニ
 ナツテル積リデス。⁽²⁾ (誤リヲ正シタ所ヲ除イテハ兩者同等)。
 但シ公理群がモット簡單ニナルコトハ望マシイト思ヒマスガ。
次ノ公理群ヲ満足スル環 R ヲ *Pyth. ring* ト云フ。

(A-1) R ハ可換ナ環デアリ單位 I ヲ含ミ且ツ實數体ヲ係
 數トスル。 (R) ノ元ヲ X, Y 等實數ヲ α, β 等デ表
 ハス)

(A-2) $X^2 = 0$ ナラ $X = 0$

(A-3) 零デナイ X ガ $X = Y^2$ ノ形ナルトキ X ヲ “正ノ元”
 ト呼ブ。然ラバ正ノ元ト “非負ノ元” トノ和ハ正
 デアル。即チ $X \neq 0$ スハ $Y \neq 0$ ナラバ $Z \neq 0$ ガ存
 在シテ $X^2 + Y^2 = Z^2$ 。

(A-4) *semi-order* $X > Y$ ($X - Y > 0$ ノコト) = ヨ
 リ、任意ノ X = 對シ X ト 0 トノ *least upper*
bound $\sup(X, 0)$ ガ存在スル。

(A-5) $X^+ = \sup(X, 0)$, $\sup(-X, 0) = X^-$ トヲ
 ケバ全テノ X = 對シ $X^+ \cdot X^- = 0$ 。

(A-6) 点列 $\{X_n\}$ ガ $X_n \leq X_{n+1}$ 且ツ或ル Y = ヨリ
 $X_n \leq Y$ ($n = 1, 2, \dots$) ナラバ *least*

(1) 廢棄デキルノハ加法ニ關スル部余大デ乘法ニ關スル方ハ
 公理 iv) 必要デス。

(2) 証明容易デス。

upper bound $\sup_{n \geq 1} X_n$ 存在ス。

(A-7) $A > 0$, $X_i \geq 0$ $X_{i+1} \geq X_i$ 且 $\sup_{i \geq 1} X_i$ 存在
スレバ $A \cdot \sup X_i = \sup (A \cdot X_i)$

(A-8) $X_i \cdot X_j = 0$ ($i \neq j$) + ラバ

$$\sum_{i=1}^{\infty} X_i = \sup_{n \geq 1} \inf_{m \geq n} \sum_{i=1}^m X_i = \inf_{n \geq 1} \sup_{m \geq n} \sum_{i=1}^m X_i$$

$\in \mathbb{R}$

§2. Stone 公理ト結果

次ノ公理群ヲ満足スル環ヲ考ヘル。—— Stone = ヲレ
ニ斯ル環ハアル *bicompact* 空間ノ上ノ “有界且 Borel
可測函数ノ作ル環” トシテ具体的ニ表現サレル。

(B-1), (B-2) 夫々 (A-1), (A-2) ト同シ。

(B-3) $\mathbb{R}$ ノ幾ツカノ元ヲ “正ノ元” ト呼ブ。 X ガ正ノ元
トルコトヲ示スノ $= X > 0$ ト記ス。然ラバ $X > 0$,
 $Y > 0$ + ルトキ $X + Y > 0$, $X \cdot Y \geq 0$, $\sqrt{X} \geq 0$
($\sqrt{\cdot}$ ハ実数 ≥ 0)。又 $I > 0$, 0 (零) ハ正デナ
イ。且ツ $X \neq 0$ + ラ $X^2 > 0$ 。

(B-4) 任意ノ $X =$ 對シ実数 α, β (≥ 0) ガ定ツテ
 $-\beta I < X < \alpha I$ ⁽¹⁾ — “boundedness axiom”

(1) $X > Y$ ハ $X - Y > 0$ ノコト。コノ公理ノ系 = 環ガ *linear
metric space* = ナル。即チ $\|X\| =$ 上ノ如キ α, β ,
g. l. b. トトレバヨイ。

(B-5) (A-6)と同じ。

§3. Stone, ring, Pyth. ring + ルコトノ証

1) $X > 0$ トスルトキ $X = Y^2$ ト書ケルコトノ証。

$X < I$ ト假定シテヨイ ((B-4) = ヨル)。ヨッテ
operator theory ノ常套手段デ $\sqrt{1 - (1-X)}$ ノ
冪級展開ニ於テ X ヲ代入シテ $X^{\frac{1}{2}} \geq 0$ ヲ得テ
 $(X^{\frac{1}{2}})^2 = X$ 。

2) (A-4) ヲ出スコト。—— 同時ニ (A-5) ニ出ス。
上カラ $|X| = (X^2)^{\frac{1}{2}}$ カ定マリ; $|X| \geq X, -X$ + コト
ト容易クワカル。 $|X| = \sup(X, -X)$ + コトハ
 $X' \geq X, -X$ トスルト $X'^2 \geq X^2$ ヲ得ルコトカラワカル。
何者次ニ示スヌウニ $0 < X, 0 < Y, X^2 < Y^2$ カ
ラ $X < Y$ ガ出ルカラ。

$$\left(X^+ = \frac{|X| + X}{2}, \quad X^- = \frac{|X| - X}{2} \right) \text{ トヲケバ}$$

$$X = X^+ - X^-, \quad |X| = X^+ + X^- \text{ 且ツ } X^+ \cdot X^- = 0 \\ (X^2 = |X|^2 = \text{ヨル})$$

故ニ談話 875 公理群カラノ結果1)ノ訂正 ト
同様ニシテ $0 < X, 0 < Y, X^2 < Y^2$ ヨリ $X < Y$
出ル)。

従ッテ $|X| = \sup(X, -X) = \sup(X, -X, 0)$
ヲ得テ上ノ $X^+ = \sup(X, 0), X^- = \sup(-X, 0)$

ナルコトモワカッタ,

3) (A-7)ヲ出スコト.

形ヲカヘテ $A > 0$, $X_i \geq 0$, $X_{i+1} \leq X_i$ 且ツ

greatest lower bound $\inf_{i \geq 1} X_i = 0$

トキ.

$$A \cdot \inf (X_i) = \inf (A \cdot X_i)$$

ヲ証明シマシ。左辺 0 ガカラ右辺 0 ナコトヲ示セ
バ充分。

所ガ (B-4) = ヨリ $A < \infty$ ナル $\alpha > 0$ ガアルカラ
明カ。

4) (A-8)ハ不要。

何者、Stone, ring ハ (A-1)乃至 (A-7)
ヲ満足スルカラ, 談話 873, 875 = ヨリ “可測函数
環” トシテ具体的ニ表現出来ル。然モ (B-4) ガア
ルカラ “有界可測函数ノ環” トシテ (A-8) が必要
ガッタノハ有界デカイ函数が登場シテ来ルタメニデア
ルカラ。

以上ニヨツテ “boundedness” ガドンナニ強い公理
デアルカミワカッタ。勿論 Stone ノ公理群ハソノ代リ使ヒ
易イ。特ニ Hilbert 空間ノ有界 + Hermite 作用素 H
ノ spectral theorem ヲ出ストキニハ, H カラ生成サ
レル環ガ (A-1) 乃至 (A-7) ヲ充タスコトヲ試スヨ
リ, (B-1) 乃至 (B-5) ヲ満足スルコトヲ試ス方がズ
ツト容易デアル。併シ上ニ示シタ如ク Stone ノ公理カラ

$(A' - b)$ 乃至 $(A - \gamma)$ ノ出テ來ルコトヲ証明スルコトモ
 簡單ダカラ ——— $\sqrt{(1 - (1 - t^2))}$ ヲ使フ式ケ ———
 “boundedness” ヲ assume ヤガ有界デ+イ operator
 ヤ函数ヲモ含ムヤウニシタ方が一般デヨリハアルマイカ。