



Title	Lie algebraニ関スル Levi ノ定理
Author(s)	安倍, 亮
Citation	全国紙上数学談話会. 1940, 204, p. 393-411
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74817
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

887. Lie algebra = 関スル Levi の定理

安 倍 亮

§ 1. ハシガキ

$\mathcal{R}$ は Körper P 上 Lie-algebra トスル。

即ち $\mathcal{R}$ は有限階 / P -Modul:

$$\mathcal{R} = Pu_1 + \dots + Pu_r$$

乃 $\mathcal{R} \ni a, b$ = 對シ, 積 $a \circ b$ が定義サレ, コノ積ハ

$$1^\circ \quad a \circ a = 0$$

$$2^\circ \quad a \circ (b \circ c) + b \circ (c \circ a) + c \circ (a \circ b) = 0$$

$$3^\circ \quad (d_1 a_1 + d_2 a_2) \circ b = d_1 (a_1 \circ b) + d_2 (a_2 \circ b),$$

$$d_1, d_2 \in P$$

ヲ満足スル。 $\mathcal{R}$ ハ Basis / 積ノ式

$$u_i \circ u_j = \sum_k c_{ij}^k u_k, \quad c_{ij}^k \in P$$

乃 完全 = 決ル。 $1^\circ, 2^\circ$ = 照應シテ c_{ij}^k ハ

$$c_{ii}^k = 0, \quad c_{ij}^k = -c_{ji}^k,$$

$$\sum_t (c_{it}^s c_{jt}^t + c_{jt}^s c_{it}^t + c_{kt}^s c_{ij}^t) = 0$$

ヲ満足スル。

$\mathcal{R}$ / P -Teilmodul σ が $\sigma \circ \sigma \subset \sigma^{(1)} + \dots + \dots$ トナシ,

-
- 1) a, b 各 Teilmodul ナルナリ, $\sum a_i \circ b_i$ ($a_i \in \sigma, b_i \in b$)
 / 全体ヲ $\sigma \circ b$, $a + b$ ($a \in \sigma, b \in b$) / 全体ヲ $\sigma + b$
 ト書ク。

$\alpha \in \mathfrak{R}$ 1 Teilalgebra, $\alpha \circ \mathfrak{R} \subset \alpha + \mathfrak{R}$ トキ
 Ideal ト云フ。 $\mathfrak{R} \supset \mathfrak{R}' = \mathfrak{R} \circ \mathfrak{R} \supset \mathfrak{R}'' = \mathfrak{R}' \circ \mathfrak{R}' \supset \dots$
 ハ $\mathfrak{R}$ 1 Ideal 1 減少列デアアル。之レガ $(0) = \text{終ル}$ トキ
 $\mathfrak{R}$ ハ "可解" デアルト云フ。 α, b が $\mathfrak{R}$ 1 可解 Ideal
 十 $\alpha + b \in \text{可解 Ideal}$ デアレ。従ッテ $\mathfrak{R}$ ハ 最大 1
 可解 Ideal を持ッ。 $\mathfrak{R}$ 1 Lie-Algebra $\mathfrak{R}$ 1
 "Radikal" ト云フ。 $\mathfrak{R} / \alpha \text{ mod } \mathfrak{R}$ 1 Rest-
 klassenalgebra $\mathfrak{R}/\alpha$ ハ (0) 以外 = 可解 Ideal
 7モタ + イ。コノヤウ + Lie-Algebra ハ halbein-
 fach" デアルト云フ。

$\mathbb{F}$ が複素数ノバ7ヒ = Levi ハ 次 1 定理ヲ証明シ
 夕。

Levi 1 定理. Lie-Algebra $\mathfrak{R}$ 1 Radikal
 $\mathfrak{R} = \mathfrak{n} + \mathfrak{R}$ Restklassen 1 代表ガ, ソレ自身 Teil-
 algebra $\mathfrak{R}'$ 7 + スヤウ = トレル。即チ Modul トシテ
 $\mathfrak{R} = \mathfrak{n} + \mathfrak{R}'$ (直和)。

$\mathfrak{R}' \cong \mathfrak{R}/\mathfrak{n}$ ハ halbeinfach + Teilring デ
 アルガ, 必ズ $\mathfrak{R}' \in \text{Ideal}$ デハ + イ。コノ定理 1 著シイ應
 用トシテハ, 任意 1 Lie 群芽ガ Lie 群 = 拡張デキル事ノ
 証明 = 此定理ガ使ハレル。2)

廿テ, コノ定理ト全ク analog + 定理ハ asso-
 ziative Algebra ノバ7ヒ = 成リ立ッ。3)

2) Pontryagin: Topological Groups, Chap.
 IX § 54 参照。

3) 次頁へ

上ノ定理ノ中デ Lie-Algebra トアルカハリニ唯
 Algebra ト書ケバヨイデアアル。assoziativ ノト
 キハ、 $R/\mathfrak{p}$ カ Grundkörper ヲ拡大シテモ常ニ
 halbeinfach デアリサヘスレバ定理ハ成立ツコトが知
 ラレテキル。例ヘバ Grundkörper P カ vollkommen
 ナライ。ソコデ Lie-Algebra ノバアヒニモ P ハ
 モット一般ニ出来サウナモノヲ考ヘラレル。Lie 群トノ関
 係ハナクナルガ、代数ノ問題ニハナル。

Whitehead ハ Levi ノ定理ヲ P ガ複素数ノトキト
 實数ノトキト両方証明シテ居ル。⁴⁾ P ガ複素数ノトキノ証明
 ハ其ノマデ P カ任意ノ Charakteristik 0 ノ代数的
 閉体ノ場合ニ使ヘル。 P カ實数ノトキノ証明モ一ウシタ注意
 ヲ附ケ加ヘレバ一般ノ Charakteristik 0 ノ Körper
 ノ場合ニ使ヘル。

assoziativ ノ場合カラ類推スレバ、Charakteristik
 $\neq 0$ デモ P カ vollkommen ナラ定理ハ成立チサウナ
 モデアアル。併シ halbeinfach + Lie Algebra
 ノ構造ノ議論ハ今マデノ儘デハ Charakteristik 0
 ノトキニシカ使ヘナイカラ、若シ本嘴ヲトシテモ証明ハ大分
 様子ヲ変ヘナケレバナラナイデアラウ。

以下大体 Whitehead ノマリアニ従ツテ、 P ガ一般

3) 例ヘバ Deuring Algebren S. 23.

4) J. H. C. Whitehead: Proc. Cambr. Phil. Soc.
 v. 32 (1936) p. 229

1 標数 0 の体ノトキ = Levi ノ定理ヲ証明スル。

§2. Halbeinfache Lie-Algebra.

P ハ有限断ラタクラモ標数 0 トスル。 P ノ上ノ Lie-Algebra $\mathcal{L}$ ノ各元 a = 有限階ノ P -Modul $\mathcal{M}$ ノ一次変換 A が對應シテキルトスル: $a \rightarrow A$. コノ對應が

$$a \rightarrow A, b \rightarrow B \text{ かつ } \alpha a + \beta b \rightarrow \alpha A + \beta B,$$

$$a \circ b \rightarrow AB - BA = A \circ B$$

ヲ満足スルトキ, $a \rightarrow A$ ヲ $\mathcal{L}$ ノ表現ト云ヒ, $\mathcal{M}$ ヲコノ表現ノ Darstellungsmodul トイフ。特ニ $\mathcal{M}$ トシテ $\mathcal{L}$ 自身ヲトル, a ヲキメタトキ $a \circ x$ ハ x = 對スル一次変換デ $a \circ x = Ax$ ト書ケル。 $a \rightarrow A$ ヲ $\mathcal{L}$ ノ正規表現ト云フ。

$a = \alpha^i u_i$ ⁵⁾ トシ, ソノ正規表現ヲ u_i ノ Basis トシテ行列トシテカケバ

$$A = \alpha^i U_i, U_i u_j = u_i \circ u_j = c_{ij}^k u_k,$$

$$\therefore U_i = \|c_{ij}^k\| \text{ (} c_{ij}^k \text{ ハ } i \text{ 行 } j \text{ 列ノ元)}.$$

$$a = \alpha^i u_i, b = \beta^j u_j = \text{對シ}$$

$$\begin{aligned} \varphi(a, b) &= \text{Spur}(AB) = \alpha^i \beta^j \text{Spur}(U_i U_j) \\ &= g_{ij} \alpha^i \beta^j \end{aligned}$$

5) 之レカラ先ハ Tensor ノ記法ニ從ツテ, 上下ニアラハレル同ジ Index がアレバ, ソレヲニツイテ加ヘルコトニスル。

+ル α, β / 對稱双一次形式 φ を考へル。

$$g_{ij} = S_p(U_i U_j) = C_{i\beta}^{\alpha} C_{j\alpha}^{\beta} = g_{ji}$$

Cartan = 従ッテ

Ⅰ Grundkörper P の Charakteristik 0
 +ルトキ, R が halbeinfach +ル必要+分條件ハ,
 φ / Diskriminante $\text{Det} \| g_{ij} \|$ が 0 デ +イコ
 トデアル。

従ッテ R が halbeinfach +ラベ $\| g_{ij} \|$ / 逆行
 列 $\| g^{ij} \|$ カアル。

$$g_{i\alpha} g^{\alpha j} = \delta_i^j, \quad g^{ij} = g^{ji}$$

コ / g_{ij}, g^{ij} を Metrik / 基本 Tensor / ヲウ = 考
 へテ, Vektor 又 Tensor / Index を上ガ下リ下ガ
 上リスルコト = スル。例へバ

$$C_{ijk} = C_{ij}^{\alpha} g_{\alpha k}, \quad C_{i..}^{jk} = g^{j\alpha} C_{i\alpha}^k$$

Ⅱ C_{ijk} ハ 歪對稱 Tensor デアル (従ッテ
 $C_{i..}^k = C_{i..}^k, \quad C_{i..}^{jk} = -C_{i..}^{kj}$ 等モ成立ス)

$$\text{証明. } C_{ijk} = g_{k\alpha} C_{ij}^{\alpha} = C_{ij}^{\alpha} S_p(U_k U_{\alpha})$$

$$= S_p(U_k C_{ij}^{\alpha} U_{\alpha}) = S_p(U_k (U_i \circ U_j))$$

$$= S_p(U_k U_i U_j) - S_p(U_k U_j U_i)$$

之レカラ容易ニ分ル。 (終)

次, Lemma ハ後ニ用ヒル。

6) C_{ij}^k / k / 位置ハ 三番目 / 上, 即チ $C_{ij}^{..k}$ ト考へル / デアル。

$$\boxed{\text{Lemma 1}} \quad C_{l..}^{ij} C_{ij}^k = -\delta_l^k$$

$$\begin{aligned} \text{証明} \quad C_{l..}^{ij} C_{ij}^k &= C_{l..}^{ij} C_{ij\alpha} g^{\alpha k} = -C_{l..}^{ij} C_{\alpha ji} g^{\alpha k} \\ &= -C_{li}^j C_{\alpha j}^i g^{\alpha k} \\ &= -g_{l\alpha} g^{\alpha k} = -\delta_l^k \quad (\text{終}) \end{aligned}$$

$\mathcal{R}$, 一次変換 D が

$$(D): D(x \circ y) = Dx \circ y + x \circ Dy$$

ヲ満足スルトキ, D ヲ $\mathcal{R}$ ノ "Ableitung" トイフ。特 = $D \circ x = x \circ D$ ノ Ableitung ナルガ, エレヲ $\mathcal{R}$ ノ innere Ableitung ト云フ。次ノ定理ハ Cartan ヨリ來ヨク知ラレテ居ル。

$\boxed{\text{Lemma 2}}$ $\mathcal{R}$ が halbeinfach ナラ, $\mathcal{R}$ ノ Ableitung ハスベテ innere Ableitung ナル。*)

証明. D ヲ $\mathcal{R}$ ノ任意ノ Ableitung トスル。

$\overline{\mathcal{R}} = \mathcal{R} + P d$ ヲ作り $d \circ d = 0$, $d \circ x = Dx$, $x \in \mathcal{R}$ ト定義スレバ, D ノ満足スル式 (D) = ヲリ $\overline{\mathcal{R}}$ ハ Lie-Algebra ナリ, $\mathcal{R}$ ハ $\mathcal{R}$ ノ halbeinfach + Ideal ナル。*) $\overline{\mathcal{R}}' = \mathcal{R} \neq \overline{\mathcal{R}}$ ナカラ $\overline{\mathcal{R}}$ ハ halbeinfach ナハ + 1。*) 故 = $\mathcal{R}$ ノ Radikal $\mathcal{N} \neq 0$. $\mathcal{R} \cap \mathcal{N}$ ハ $\mathcal{R}$ ノ可解 Ideal ナカラ = 0 $\therefore \mathcal{R} + \mathcal{N}$ ハ Ideal ノ直和デ且少クモ $\mathcal{R}$ ヨリ階数が 1 大キイカラ $\overline{\mathcal{R}} =$ 一致スル $\overline{\mathcal{R}} = \mathcal{R} + \mathcal{N}$. $\mathcal{N}$ ハ一次元ダカラ $\mathcal{N} = (r)$, $r = \alpha d + b$, $b \in \mathcal{R}$; $\mathcal{N} \not\subset \mathcal{R}$ ダカラ $\alpha \neq 0$,

*) P が complex トキハ Cartan, These p. 113

na) $\overline{\mathcal{R}}$ が halbeinfach ナラ, $\overline{\mathcal{R}}' = \overline{\mathcal{R}}$.

$$\therefore a = -\alpha^+ \text{ と } \alpha^- \text{ と } \alpha = (d - a), a \in \mathcal{R}$$

1) 形 = +ル。 $\mathcal{R}$ / 任意 / 元 x ハ α ト直交ダカラ,

$$(d - a) \circ x = 0 \text{ 即 } a \circ x = d \circ x = Dx, \text{ 故 } = D = Da$$

$\mathcal{R}$ $\neq$ innere Ableitung = +ル。 (終)

次 = Charakteristik 0 / 代数的閉体 P / 上 /
halbeinfach + Lie-Algebra $\mathcal{R}$ / 構造 = 関シテ、
必要 + 結果ヲ導ケテオク。⁸⁾

III $\mathcal{R} =$ 次 / ヲ与テ Basis $h_1, \dots, h_n, e_\alpha, e_{-\alpha},$
 $\dots$ トルコトガデキル。

$$\mathcal{R} = Ph_1 + \dots + Ph_n + Pe_\alpha + Pe_{-\alpha} + Pe_\rho + Pe_{-\rho} + \dots + Pe_\rho + Pe_{-\rho}$$

$$h_i \circ h_j = 0 \quad (1 \leq i, j \leq n)$$

$$h_\lambda = \sum \lambda_i h_i \text{ トオクトキ}$$

$$h_\lambda \circ e_\alpha = (\alpha, \lambda) e_\alpha \quad (\alpha, \lambda) = \sum \alpha_i \lambda_i \quad \alpha_i \text{ ハ有理数}^{9)}$$

$$h_\lambda \circ e_{-\alpha} = -(\alpha, \lambda) e_{-\alpha}$$

$$e_\alpha \circ e_{-\alpha} = -\sum \alpha_i h_i$$

$$S = h_\lambda + \sigma_\alpha e_\alpha + \sigma_{-\alpha} e_{-\alpha} + \dots + \sigma_{-\rho} e_{-\rho} = \text{對シ}$$

$$\varphi(S, S) = (\alpha, \lambda)^2 + \dots + (\rho, \lambda)^2 - 2\sigma_\alpha \sigma_{-\alpha} - \dots - 2\sigma_\rho \sigma_{-\rho}$$

$(\alpha, \lambda), \dots, (\rho, \lambda)$ / 中一次独立 + ϵ / ガ丁度 n 個ヲ

8) 例ヘバ吉田氏: γ -環論。

9) Charakteristik 0 / Körper P ハ有理数体 = 同型 + Primkörper ヲ含ム, γ / 元ヲ簡單ニ「有理数」ト云フコト = スル。

ル。従って $h_1, \dots, h_n$ = 更 = 適當に有理係数1-次変換ヲ施シテ

$$\mathcal{Q}(s, s) = g_1 \lambda_1^2 + \dots + g_n \lambda_n^2 - 2\sigma_2 \sigma_{-2} - \dots \\ \dots - 2\sigma_p \sigma_{-p} \quad (g_i \wedge \text{正, 有理数})$$

ノ形ニシテアルモノトシテヨイ。

最後ニ標数0ノ代数的閉体 P ノ上、*halbeinfach* + *Lie Algebra* $\mathcal{R}$ ノ P = オケル表現 $a \rightarrow \bar{A}$ ガアルトキ:

IV *Teilalgebra* $(h_1, \dots, h_n)$ ノ元 $h_\lambda = \sum \lambda_i h_i$ = 對應スル *Matrix* $\bar{H}_\lambda$ ノ *Eigenwerte*ハスベテ $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ノ1-次形式

$$\Lambda^{(k)}(h_\lambda) = (\Lambda^{(k)}, \lambda) = \sum_{i=1}^n \Lambda_i^{(k)} \lambda_i, \quad k=1, 2, \dots, g \quad (g \wedge \bar{H} \text{ノ次数})$$

デ、シカモ係数 $\Lambda_i^{(k)}$ ハスベテ有理数デアル。特ニ $h_i \rightarrow \bar{H}_i$ ナラ

$$S_p(\bar{H}_\lambda^2) = \sum_{k=1}^g (\Lambda_i^{(k)})^2 \quad \wedge \text{有理数} \geq 0$$

又 $e_\alpha \rightarrow \bar{E}_\alpha$ = 對シテハ $S_p(\bar{E}_\alpha \bar{E}_{-\alpha})$ ハ有理数 ≤ 0 ¹⁰⁾

§3. Casimir 行列

標数0ノ体 P ノ上、*halbeinfach* + *Lie algebra* $\mathcal{R}$ ノ P = オケル表現 $\varphi: a \rightarrow \bar{A}$ ガアルトスル。 $\mathcal{R}$ ノ *Basis* $u_i \rightarrow \bar{U}_i$ 。コノ u_i = 關シテ g_{ij} , g^{ij} ヲ計

算シ

$$C = g^{ij} \bar{U}_i \bar{U}_j = \bar{U}_i \bar{U}^i = \bar{U}^j \bar{U}_j \quad (\bar{U}^i = g^{ia} \bar{U}_a)$$

ナ行列ヲ作ル。形カラ明カナメウニ $\mathfrak{g}$ ノ Basis $\{u_i\}$ ノ
トリ方ニハ無関係ニ決ル。^{10a)}之ヲ表現 φ ノ Casimir 行
列ト云フ。

□. (Casimirノ定理) φ ノ Casimir 行列 C ハ
表現ノ任意ノ Matrix $\bar{A}$ ト可換デアル:

$$C \bar{A} = \bar{A} C$$

証明: $C \bar{U}_k = \bar{U}_k C$ ヲ云ヘバヨイ。

$$\bar{U}_i \bar{U}_k = \bar{U}_i \circ \bar{U}_k + \bar{U}_k \bar{U}_i = C_{ik}^j \bar{U}_j + \bar{U}_k \bar{U}_i =$$

注意スレバ

$$\begin{aligned} C \bar{U}_k &= \bar{U}^i \bar{U}_i \bar{U}_k = C_{ik}^j \bar{U}^i \bar{U}_j + \bar{U}^i \bar{U}_k \bar{U}_i \\ &= C_{ikj} \bar{U}^i \bar{U}^j + \bar{U}_j \bar{U}_k \bar{U}^j \\ &= C_{ikj} \bar{U}^i \bar{U}^j + C_{jki} \bar{U}_i \bar{U}^j + \bar{U}_k \bar{U}_j \bar{U}^j \\ &= (C_{ikj} + C_{jki}) \bar{U}^i \bar{U}^j + \bar{U}_k C = \bar{U}_k C \quad (\text{終}) \end{aligned}$$

□. φ ガ零表現デナイナラ, $Sp(C)$ ハ正ノ有理数デ
アル。¹¹⁾

証明. $\mathfrak{g}$ ノ Basis トシテ IIIノ $h_1, \dots, h_n, e_2, \dots, e_{-p}$
ヲ用ヒレバ

10) リー環論: 31頁。

10a) 表現加群ノ Basisノ取方ニハ関係スル。

11) リー環論: 33頁, P ガ複素数ノトキ $Sp(C)$ ガ正ノ実数ニナ
ルコトハ証明シテアル。有理数ニナルコトモ Whitehead,
L.C.ニ証明ガアルガヨク分ラナイ。

1 $\varphi(S, S) = g_1 \lambda_1^2 + \dots + g_n \lambda_n^2 - 2\sigma_2 \sigma_{-2} - \dots - 2\sigma_p \sigma_{-p}$
 カラ

$$C = \frac{1}{g_1} \bar{H}_1^2 + \dots + \frac{1}{g_n} \bar{H}_n^2 - 2E_2 E_{-2} - \dots - 2E_p E_{-p}$$

g_i は正/有理数, 又 $\forall \epsilon > 0$ $S_p(\bar{H}_i^2)$ は有理数 ≥ 0 ,
 $S_p(\bar{E}_\alpha \bar{E}_{-\alpha})$ は有理数 ≤ 0 カラ $S_p(C)$ は有理数 ≥ 0 デ
 アル。 $S_p(C)$ が実際正ナルコトヲ云フニハ $S_p(\bar{H}_i^2)$ ノ
 中少クトモ一ツ 0 デナイモノガアルコトヲ云ヘバヨイ, ソレ
 ニハアル $\bar{H}_i$ ノ少クトモ一ツノ固有値が 0 デナイコトヲ云ヘ
 バヨイ。實際 $\bar{H}_1, \dots, \bar{H}_n$ ノ固有値が全部 0 デアレバ, ス
 マテノ $\bar{E}_\alpha = 0$ ナルコトガ云ヘ, $-\sum \alpha_i \bar{H}_i = \bar{E}_\alpha \circ \bar{E}_{-\alpha} = 0$
 カラ $\bar{H}_i = 0$ スナハチ φ が零表現ナルコトガ証明デナル
 ノデアルガ, ソレハ「リー環論」34頁ニ譲ルコトニス
 ル。

以上ハ §2 ノ III, IV ヲ使ツテキルタメニ P が代数的閉体
 デナケレバナラナイ。

若シ P が代数的閉体デナイナラバ P^* ヲ P ノ上ノ代数的
 閉体トシ, $\mathcal{R} = Pu_1 + \dots + Pu_r$ カリ, P^* 上ノ *halbein-*
fach + Lie algebra $\mathcal{R}^* = P^*u_1 + \dots + P^*u_r$
 ヲ作り, 同時ニ $\mathcal{R}$ ノ P = オケル表現

$$\varphi: \alpha^i u_i \rightarrow \alpha^i \bar{U}_i, \alpha_i \in P$$

ヲ $\mathcal{R}^*$ ノ P^* = オケル表現

$$\varphi^*: \alpha^{*i} u_i \rightarrow \alpha^{*i} \bar{U}_i, \alpha^{*i} \in P^*$$

ニ拡張スル。定義カラ φ^* ノ Casimir 行列 C^* ハ, φ ノ

Casimir 行列 C ト一致スル。 $S_p(C^*)$ が正 / 有理数ナルコトハ証明シタカラ, $S_p(C)$ も正 / 有理数デアル。(終)

VII $\mathfrak{g}$ が絶対既約表現ナラ, $\mathfrak{g}$ / Casimir 行列 C ハ

$$C = cE, \quad c \text{ ハ 正 / 有理数}$$

ノ形デアル。 C ハ表現類 = 固有ナーツノ常數。

証明. C ハ $\nabla = 0$ リ, 絶対既約ナ行列ノ System ト可換デカラ, Schur / Lemma = ヨリ, $C = cE$ ノ形 = ナル。 $\mathfrak{g}$ ノ次数ヲ g トスレバ

$S_p(C) = gc = \text{正 / 有理数}$, 故ニ $c \in \text{正 / 有理数}$ デアル。(終)

上ノ定理ハ実ハ絶対既約デナリ, 單 = P = オケル既約表現デモ成立ツ。之レガ後 = 必要 = ナル Lemma デアル。

Lemma 3 P ハ標數 0 / 任意ノ体, $\mathcal{R}$ ハ P / 上ノ halbeinfach + Lie algebra, $\mathfrak{g} \supset \mathcal{R}$, P = オケル既約表現, $C = C_{\mathfrak{g}} \supset \mathfrak{g}$ / Casimir 行列トスル。コノトキ

$$C = cE$$

ノ形 = ナリ, $C = C_{\mathfrak{g}}$ ハ $\mathfrak{g}$ / 表現類 = 固有ナーツノ正 / 有理數デアル。

証明. $\mathfrak{g}$ / Darstellungsmodul $\supset M$ トスル。 M / 係數ヲ P / 上ノ代数的閉体 P^* ヲ拡張シ M_{P^*} トシ, $M_{P^*} = \text{含マレルーツノ既約ナ Darstellungsmodul}$ $\supset$

m^* トスル。 m^* , Basis ヲ $\mathcal{M}$ / Basis , 一次結合ト
 シテアラハストキ出テ素ル係數ヲ含ム P / 有限次 Galois
 拡大体ヲ Γ トスレバ, $m = \mathcal{M}_\Gamma \cap m^*$ トスルト $m^* = P^* m$
 デ, 従ッテ m ハ絶對既約 + Darstellungsmodul デ
 アル。 Γ/P , Galois 群ヲ $\mathcal{O}_\Gamma$ トスレバ, $\sigma \in \mathcal{O}_\Gamma$ ヲ係數 =
 作用サセレコトニヨリ, $\mathcal{M}_\Gamma$ / Automorphismus σ
 ガデキル。 m^σ ハスベテ絶對既約デ, $\sigma, \tau \in \mathcal{O}_\Gamma$ ナラ
 $m^\sigma = m^\tau$ 若クハ $m^\sigma \cap m^\tau = 0$ 。 $m^c = m + m^c$ 1
 全体ハ $\mathcal{O}_\Gamma$ / 部分群 $\mathcal{O}_\Gamma$ ヲ作ル。

$$\mathcal{O}_\Gamma = \mathcal{O}_\Gamma \sigma_1 + \mathcal{O}_\Gamma \sigma_2 + \dots + \mathcal{O}_\Gamma \sigma_j, \sigma_i = 1$$

各副群 $\mathcal{O}_\Gamma \sigma_i = m_i = m^{\mathcal{O}_\Gamma \sigma_i} = m^{\sigma_i}$ が對應シ, $i \neq k$ ナ
 ラ $m_i \cap m_k = 0$ 。

$n = m = m_1 + \dots + m_j$ ハ直和デ, 且ツ n ハ $\mathcal{O}_\Gamma$ / ス
 ベテ / Automorphismus デ不変デカラ $n = \Gamma(n \cap \mathcal{M})$
 $n \cap \mathcal{M}$ ハ $\mathcal{M} =$ 含マレル Darstellungsmodul $\neq 0$
 デアル。故ニ $\mathcal{M}$ / 既約性カラ $n \cap \mathcal{M} = \mathcal{M} \therefore n = \mathcal{M}_\Gamma$
 即チ:

$$\mathcal{M}_\Gamma = m_1 + \dots + m_j$$

ノ如ク互ニ共軛 + 絶對既約 + Darstellungsmodul ,
 和ニ含レル。 $m_i = (v_1, \dots, v_m)$ ニ對シ $m_i = (v_1^{\sigma_i}, \dots,$
 $v_m^{\sigma_i})$ ナル Basis がトレルカラ, コノ Basis = 就テ表
 現ノ行列ヲ書クト¹²⁾, $\mathcal{O}_\Gamma : a \rightarrow \bar{A}$ ハ $\Gamma =$ 於テ

12) C ハ一般ニハ Darstellungsmodul , Basis / 取方ニヨリ変ル
 ガ, 今ノバツヒハ結果カラ云ッテ変ラナイカラ, トノヤリ + Basis
 / 取方ヲシテ証明シテモヨイ。

$$a \rightarrow \left| \begin{array}{c} \bar{A}_1 \\ \bar{A}_1^{\sigma_2} \\ \vdots \\ \bar{A}_1^{\sigma_r} \end{array} \right| \quad (a \rightarrow \bar{A}_1, \text{ハ絶対既約})$$

ト zerfallen スル。従ッテ絶対既約表現 $a \rightarrow \bar{A}_1$,
Casimir 行列ヲ $C_1 = c_1 E$ トスレバ

$$C_{\rho} = \left| \begin{array}{c} c_1 E \\ c_1^{\sigma_2} E \\ \vdots \\ c_1^{\sigma_r} E \end{array} \right|$$

c_1 ハ V 依ッテ Γ / Primkörper / 元デアル, 従ッ
ヲ $P = \mathbb{C}$ 含マレ $c_1 = c_1^{\sigma_2} = \dots = c_1^{\sigma_r} = c$.

$$\therefore C_{\rho} = c E$$

$c = c_1$ ハ 正ノ有理数。

(終)

§4. Levi / 定理 / 証明.

[定理] $\mathcal{R}$ ヲ標数 0 / 体 P / 上 / Lie Algebra
トスル。 $\mathcal{R}$ ハ Radikal $\mathcal{N}$ ト halbeinfach +
Teilalgebra $\mathcal{S}$ ト / (Modul トシテ /) 直和 =
+ スル。

$$\mathcal{R} = \mathcal{N} + \mathcal{S}$$

証明.

(I) 先ヅ $\mathcal{N}$ が可換デ而モ (0) トル以外 = $\mathcal{R}$ / Ideal
ヲ含マ + イトキ = 定理ヲ証明スレバ一般ノ場合モソレカラ 窓

易=出ルコトヲ示ス。

一般に $\mathcal{R}$ が與ヘラレタトキ, $\mathcal{R}$, Ideal, 列

$$\mathcal{R} \supset \mathcal{R}' \supset \mathcal{R}'' \supset \cdots \supset \mathcal{R}^{(s)} = (0)$$

ヲ, 出来レバ更 = verfeinern シテ, $\mathcal{R}$ ヲ Operator
トスル Kompositionsreihe $\mathcal{R} = \mathcal{R}_0 \supset \mathcal{R}_1 \supset \cdots \supset \mathcal{R}_c$
= 0 ヲ作ル。 $\mathcal{R}_i / \mathcal{R}_{i+1}$ ハ可換デアアル。 $C = /$ ノトキ定理が
証明デキタトシテ, 任意ノ $C =$ 就テ証明デキルコトヲ云ヘバ
ヨイ。 C 以下デハ既ニ云ヘタトスル。

$\mathcal{R} / \mathcal{R}_1$ ハ $\mathcal{R} / \mathcal{R}_1$ ヲ Radical トシ從ツテ $C = /$ デアル
カラ, $\mathcal{R} / \mathcal{R}_1$, halbeinfach + Teilalgebra
 $\mathcal{S}_1 / \mathcal{R}_1$ ($\mathcal{S}_1 \supset \mathcal{R}_1$) がアリ $\mathcal{R} / \mathcal{R}_1 = \mathcal{R} / \mathcal{R}_1 + \mathcal{S}_1 / \mathcal{R}_1$
即チ $\mathcal{R} = (\mathcal{R}_1, \mathcal{S}_1)$ デ $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}_1 = \mathcal{R}_1$ 。 $\mathcal{R}_1$ ハ $\mathcal{S}_1$, Radi-
kal デアル。 $\mathcal{R}_1$, Kompositionsreihe , 長さハ
高: $C - 1$ デアルカラ $\mathcal{S}_1 = \mathcal{R}_1 + \mathcal{S} + \mathcal{R} \mathcal{S}_1$, Teilalgebra
 $\mathcal{S}$ がアリ $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{S} = \mathcal{R} \cap \mathcal{S} = 0 \quad \therefore \mathcal{R} = (\mathcal{R}_1, \mathcal{S})$
 $= \mathcal{R}_1 + \mathcal{S}$

(II) $\mathcal{R} = (\mathcal{U}_1, \cdots, \mathcal{U}_r, \mathcal{V}_1, \cdots, \mathcal{V}_g), \mathcal{W} = (\mathcal{V}_1,$
 $\cdots, \mathcal{V}_g)$; $\mathcal{W}$ ハ可換デ且 $\mathcal{R}$, Ideal ヲ含マイト
スル。

$$\mathcal{U}_i \circ \mathcal{U}_j = c_{ij}^k \mathcal{U}_k + a_{ij}^\alpha \mathcal{V}_\alpha, \quad \mathcal{U}_i \circ \mathcal{V}_\alpha = h_{i\alpha}^\beta \mathcal{V}_\beta,$$

$$\mathcal{V}_\alpha \circ \mathcal{V}_\beta = 0. \quad (13)$$

$\mathcal{U}_i$, mod $\mathcal{W}$, Klasse ヲ $\bar{\mathcal{U}}_i$ トセバ $\bar{\mathcal{U}}_i \circ \bar{\mathcal{U}}_j = c_{ij}^k \bar{\mathcal{U}}_k$

13) u , suffix 1, ..., r ハローマ字デ, v , suffix 1, ...,
..., g ハギリシヤ字デアラハス。

デアルヲ, $\mathcal{R}/\mathfrak{v}$ は *halbeinfach* ナカラ, $g_{ij} = c_{i\alpha}^k c_{j\alpha}^k$
 が *ausarten* セズ, 従ツテ g^{ij} ヲ作ツテ *Index* ヲ上下
 スルコトが出来ル。又 $\mathfrak{v}$ ヲ $\mathfrak{v} = \text{對シテハ } \mathfrak{v} \circ \mathfrak{v}_\alpha = 0$ ナカ
 ラ

$$\bar{u}_i \circ v_\alpha = h_{i\alpha}^\beta v_\beta$$

ト書イテヨイ。 $\mathcal{A}: \bar{u}_i \rightarrow \bar{U}_i = \|h_{i\alpha}^\beta\|$ は *halbeinfach*
 + *Lie algebra* $\bar{\mathcal{G}} = \mathcal{R}/\mathfrak{v}$, $\mathfrak{v}$ ヲ *Darstellungs-*
modul トスル表現デアアル。 $\mathfrak{v}$ は $\mathcal{R}$ ヲ *Operator* トシテ
einfach, 即チ表現 $\mathcal{A}$ ハ既約表現デアアル。

問題ハ $\bar{u}_i$ ノ代表トシテ u_i ノ代リニ適當ニ $u_i^* = u_i + t_i^\alpha v_\alpha$
 ヲトツテ, a_{ij}^α ノ如キ係數ヲナクスルコトデアアル。

$$u_i^* \circ u_j^* = c_{ij}^k u_k^*$$

$$\begin{aligned} u_i^* \circ u_j^* &= (u_i + t_i^\alpha v_\alpha) \circ (u_j + t_j^\alpha v_\alpha) \\ &= c_{ij}^k u_k + a_{ij}^\beta v_\beta + h_{i\alpha}^\beta t_j^\alpha v_\beta - h_{j\alpha}^\beta t_i^\alpha v_\beta \\ &= c_{ij}^k u_k^* + (a_{ij}^\beta + h_{i\alpha}^\beta t_j^\alpha - h_{j\alpha}^\beta t_i^\alpha - c_{ij}^k t_k^\beta) v_\beta \end{aligned}$$

デアアルカラ

$$(1) \quad a_{ij}^\beta + h_{i\alpha}^\beta t_j^\alpha - h_{j\alpha}^\beta t_i^\alpha - c_{ij}^k t_k^\beta = 0,$$

$$1 \leq i, j \leq r, \quad 1 \leq \beta \leq g$$

ナル $r^2 g$ 個ノ方程式ヲ満足スルヌウニ, rg 個ノ係數 t_k^β ヲ
 決メルトイフ問題ニナル。

(III) $\mathcal{A}$ が濃表現ナルトキ。既約表現ハカラ次數 $g = 1$
 デアル。故ニ $\mathfrak{v}$ ノ *Index* ハ書カナイコトニスレバ, (1) ハ

$$(2) \quad a_{ij} = C_{ij}^k t_k, \quad 1 \leq i, j \leq r$$

ナル r^2 個の式 = ナル。之レカラ r 個の t_k が解ケルナラバ、
Lemma 1 = ヨリ

$$t_l = \delta_l^k t_k = -C_l^{ij} C_{ij}^k t_k = -C_l^{ij} a_{ij}$$

ト一意的 = 解ケル。實際解ケルコトハ次のマウ = シテ分
ル。

$$[u_i, u_j, u_k] = [u_i \circ u_j] \circ u_k + [u_j \circ u_k] \circ u_i \\ + [u_k \circ u_i] \circ u_j = 0$$

$$, \text{ 係数 } C_{ij}^l a_{lk} + C_{jk}^l a_{li} + C_{ki}^l a_{lj} = 0,$$

$$\text{即ち } (a_l^{\cdot k} = g^{lm} a'_{lm})$$

$$C_{ij}^l a_l^{\cdot k} = a_i^{\cdot l} C_{lj}^k + a_j^{\cdot l} C_{il}^k.$$

之ハ $\bar{u}_l \rightarrow A \bar{u}_l = a_l^{\cdot k} \bar{u}_k$ が

$$A(\bar{u}_i \circ \bar{u}_j) = A \bar{u}_i \circ \bar{u}_j + \bar{u}_i \circ A \bar{u}_j$$

ヲ満足スルコト、即チ *halbeinfach* + *Lie Algebra*
 $\bar{\mathfrak{p}}$, *Ableitung* ナルコトヲ示シテホル。Lemma 2
= ヨリ

$$A \bar{u}_l = \bar{t} \circ \bar{u}'_l \quad \bar{t} = t^k \bar{u}_k \in \bar{\mathfrak{p}}$$

$$\text{即ち } a_l^{\cdot m} = t^k C_{kl}^m \quad \text{或ハ } a_{lm} = C_{lm}^k t_k$$

従ツテ (2) ハ解ケル。

(注意) 逆 = $\mathcal{R}$, *Radikal* $\mathfrak{r}$ が一次元ナラ、 $\mathcal{A}$ ハ

halbeinfach + Lie Algebra, 一次ノ表現, 従ッ
テ零表現デナケレバナラナイ。コノトキ上ノ証明=ヨリハ
一意的=決リ, 且ツ $\phi \in \mathcal{R}$ ノ Ideal デアル。即チ次ノ理
ヲ得ル。

「 $\mathcal{R}$, Radikal ンガ一次元ナラバ, $\mathcal{R}$ ハ hal-
beinfach + Ideal ϕ トハトノ直和=ナル。分解ハ一
意的デアル。」

(IV) ψ ガ零表現デナイ場合 = (I)ヲ解ク。

$$A_i = \begin{bmatrix} t_i' \\ \vdots \\ t_i'' \end{bmatrix} \quad \sigma_{ij} = \begin{bmatrix} a_{ij}' \\ \vdots \\ a_{ij}'' \end{bmatrix} \quad \bar{U}_i = \begin{bmatrix} h_{i1}' & \cdots & h_{ig}' \\ & h_{ii}^\alpha & \\ h_{i1}'' & \cdots & h_{ig}'' \end{bmatrix}$$

トカクト,

(I)ハ γ^2 ノ Vektor 方程式

$$(1') \quad \sigma_{ij} + \bar{U}_i A_j - \bar{U}_j A_i - C_{ij}^k A_k = 0$$

=ナル。一方 $[u_i u_j u_k]$, v_α ノ係数ヲ書キ上ゲルト

$$C_{ij}^l a_{lk}^\alpha + C_{jk}^l a_{li}^\alpha + C_{ki}^l a_{lj}^\alpha - a_{ij}^\beta h_{k\beta}^\alpha \\ - a_{jk}^\beta h_{i\beta}^\alpha - a_{ki}^\beta h_{j\beta}^\alpha = 0$$

或ハ

$$(3) \quad \bar{U}_k \sigma_{ij} + (\bar{U}_i \sigma_{jk} + C_{ki}^l \sigma_{jl}) \\ - (\bar{U}_j \sigma_{ik} + C_{kj}^l \sigma_{il}) - C_{ij}^l \sigma_{lk} = 0$$

$$\text{左辺} = \bar{U}^k = g^{kl} \bar{U}_l \quad \text{ヲ 乗ル。}$$

$$\bar{U}^k \bar{U}_k = a^2, \quad \text{Casimir 行列} = cE, \quad c \neq 0$$

$$\begin{aligned} \bar{U}^k (\bar{U}_i \alpha_{jk} + c_{ki}^l \alpha_{jl}) &= \bar{U}^k \bar{U}_i \alpha_{jk} + \bar{U}_i \circ \bar{U}^k \alpha_{jl} \\ &= (\bar{U}^k \bar{U}_i + \bar{U}_i \circ \bar{U}^k) \alpha_{jk} = \bar{U}_i \bar{U}^k \alpha_{jk} \end{aligned}$$

$$\text{同様} = \bar{U}^k (\bar{U}_j \alpha_{ik} + c_{kj}^l \alpha_{il}) = \bar{U}_j \bar{U}^k \alpha_{ik}$$

従ッテ (3) カラ

$$c \alpha_{ij} + \bar{U}_i (\bar{U}^k \alpha_{jk}) - \bar{U}_j (\bar{U}^k \alpha_{ik}) - c_{ij}^l (\bar{U}^k \alpha_{lk}) = 0$$

故ニ

$$(4) \quad A_i = c^{-1} \bar{U}^k \alpha_{ik}$$

ト置ケバ, (1') が満足サレル。之レヲスツカリ証明ハ済ンダ。

(終)

(注意) コノトキハ A_i ハ一意的ニハ決ラナイ。 A_i ノ一

般解ハ特別解

$$(4) \quad A_i^{(0)} = c^{-1} \bar{U}^k \alpha_{ik}$$

ニ (1') = 附随スル齊次方程式

$$(5) \quad \bar{U}_i \check{u}_j - \bar{U}_j \check{u}_i - c_{ij}^k \check{u}_k = 0$$

ノ一般解 $\check{u}_i$ ヲ加ヘタ。

$$A_i = A_i^{(0)} + \check{u}_i$$

デアル。 (5) ノ 解トシテハ, 一見シテ直チニハルマツ

ニ,

$$\check{u}_i = \bar{U}_i m, \quad m = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_g \end{bmatrix} \quad (w_1, \dots, w_g \text{ ハ全ク任意})$$

カアル。¹⁴⁾ $\mathcal{J}$ ハ零表現デハナイカラ, $m \neq 0$ ナラ, $\check{u}_1, \dots, \check{u}_r$ ハ悉ク 0 デハナイ. 故ニ A_i ハ事實一意的デナイコトガナル。

14) 之以外ニ方程式 (5) ノ解ハナイノデハアルマイカ?