



Title	Quasi-field / Normal bases
Author(s)	中山, 正
Citation	全国紙上数学談話会. 1940, 205, p. 412-419
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74818
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

888. Quasi-field, Normal bases

中山 正 (政大)

最近 Jacobson ハ ガロア理論 / 主定理ヲ次ノ様ナ意味ニ於テ Quasi-fields マデ迄ゲタ。即チ P フォーツノ quasi-field. ソコニ有限ノ outer automorphism ノ群 $\mathcal{O}$ (unit element 以外ガミナ outer ノ意) ガ興ヘラレテキルトシ、ソノ order ヲ n , マタ $\mathcal{O}$ デ動カヌ元ノナス quasi-subfield ヲ重トスル。シカラバ $(P:\mathfrak{F})=n$ デ P ト $\mathfrak{F}$ ノ間ノ quasi-fields ト $\mathcal{O}$ ノ subgroups ノ間ニ例ノ通りノ一対一對應ガ存在スル。($(P:\mathfrak{F})=n$ ハ両側デデアル)。

以下ニオイテ、更ニ P ハ $\mathfrak{F}$ ニ對シテ Normal basis ヲモツ。即チ $\mathfrak{F}$ ノ左加群 P ヲ更ニ $\mathcal{O}$ 右加群ト見タトキ得ラレル $\mathcal{O}$ ノ表現 ($\mathfrak{F}$ ニオケル) ハ $\mathcal{O}$ ノ正規表現ト同値デアル。即チ更ニ云ヒカヘレバ

$$b^E, b^R, b^S, \dots, b^T \quad (\mathcal{O} = \{E, R, S, \dots, T\})$$

ノ如キ一ツノ元ノ conjugates ($\mathcal{O}$ ニ關スル) カラ成立ツテキル P ノ $\mathfrak{F}$ ニ對スル左 basis ガ存在スルコトヲ証明スル。

証明ノ方法ニツイテ: 普通ノ Commutative ノ場合ノ Normal basis ノ定理ノ証明トシテハ (Noether ノ最初ノ然シク急ノアツタモノヲ除キ) Helling ノ第一ノモ (Annalen 109), Hasse-Branner ノモ

(Hasse / 類体論講義, Brauer: Anshalen 110),
Deuring / 第二ノモ / (Annalen 113), Stauffer
(Amer. J. 58) 等ガアリ更 = Artin / unpublished
ノモ / ガアル。

最初ノニツハ共 = 基礎体デナク上ノ体 = オケル = 表現
ノ同値カラ下ノ体 = オケルモノヲ出ス方法ヲ本質的 = 相当近
イモノデアアル。シカシコノ方法ヲ直接我々ノ場合 = modify
スルコトハ非常 = 困難 = 見エル。マタ Artin ノハ inter-
polation ノ公式ヲ使フノデ、コレモ困難 = 見エル。以
下ハ従ツテ Deuring / 第二ノヲ (Stauffer ノモ大
体同ジ idea デアル) modify スルコトヲ試ミルノデア
ル。

但シコノ方法ハ Speiser ノ定理ノ拡張及ビ有限群
ノ表現ノ分解ヲ主ト補助トスルノデアツテ、ソノタメ =
Deuring (及ビ Stauffer) ノ第二ノ群ノ表現ノ分
解ガ普通ノ如ク行ク場合、即チ体ノ標数ガ O ノ order
ルヲワラス 従ツテ O ノ群環ガ semi-simple = ナル
場合 = 限ラザルヲ得ナカッタ。然シソノコトノ non-semi-
simple + algebra ノ正規表現ノ理論 (主トシテ Brauer-
Nesbitt) ハソウデナイ一般ノ場合 = マデ証明ヲ拡張スル
コトヲ可能ナラシメヲキルノデアアル (近刊 Frobeniussean
algebras, II, 附録)。

従ツテ以下ノ quasi-field ノ場合モ、ノ点ハ大丈
夫デアアル。

次は一す注意シテ置キタイノハ我々ノ興味ハスベテ P がソノ $center$ = 對シテ無限階デアル場合 = アルコトデアル、有限階ナラバ万事殆ンド $trivial$ = ナルノデアル。

サテ、 P ノ $center$ ヲ Z トシ、 $\Phi = \bigoplus \mathbb{Z}$ トオク。更ニ Φ ノ第一種有限次拡大 Φ^* ヲ考ヘ、 Φ ヲ基礎体トシテ、ソレヲ Φ^* マデ拡張スルコトニヨツテ P 、 Φ カラ得ラレル P_{Φ^*} 、 Φ_{Φ^*} ヲソレゾレ P^* 、 Φ^* デアラハスコトニスル。 P/Φ ノ $automorphism$ ハ P^*/Φ^* ノソレト考ヘラレル。
(P^* 、 Φ^* ハモハヤ $quasi\text{-}field$ デハ一般ニハナシ。
然レ $semi\text{-}simple\ ring$ デアル)

補助定理 (Speiserノ定理ノ拡張) O_f ノ各元 $S =$
 P^* = オケル $regular\ matrix$ C_S が對應シテキテ且ツ

$$(1) \quad C_S C_T^S = C_{TS}$$

ヲ満シテキルトスル。然ラバ $C_S = A^{-1} A^S$ トナル様ナ P^* = オケル $regular\ matrix$ A が存在スル。

証明ハ P^*/Φ^* デナク P/Φ ノ場合ニハ Jacobsonノニヤツテアリ、我々ノ場合モ容易ニ同様ニ証明サレル。即チ
(ルレク Jacobsonノトハ異ツタ云ヒガ述べレバ)

$$u_E, u_S, \dots, u_T$$

ナル元ヲ新タニ導入シテ $crossed\ product$

$$\mathcal{P} = u_E P + u_S P + \dots + u_T P$$

ヲ考ヘル。タジシコトニ

$$u_s \eta^s = \eta u_s \quad (\eta \in \mathbb{P}), \quad u_s u_T = u_{sT}.$$

シカラバ、コレハ simple ring = ナル (Jacobson 参照)、シカモソノ center が k デアルコトハ明カデアル。
 今ソレヲ k^* マデ拡張スレバ結局ソレハ

$$\gamma_{k^*} = \gamma^* = u_E P^* + u_S P^* + \dots + u_T P^*$$

ナル crossed product = 外ナラス。故ニ γ^* モ simple ring デアル。他方関係 (1) ヲミタス C_S が興ヘラレタコトハ、ソノ次数 r トスレバ

$$V = v_1 P^* + v_2 P^* + \dots + v_r P^*$$

ナル vector space = ナイテ $u_s = \wedge (C_s, S)$ ナル semi-linear transf., $\eta \in P^* = \wedge v \rightarrow v \eta$ ナル transf. ヲ對應サセルコトニヨツテ、 V が γ^* ; 右加群ニナル事デアル。

シカル = simple ring γ^* , 右加群ハ單ニ γ^* , center k^* = 對スル behavior デキマル。ヨツテ今 $\{C_s\}$ ノカハリ = $\{E\}$ ヲトツタトキノ加群 V , ヲ考ヘルト k^* 1 元 = $\wedge$ 同型 = behave スル。故ニ V ト V ノ作用同型、スナハチ

$$C_s = A^T E A^S = A^T A^S$$

ナル regular matrix A が存在スル。

定理ノ証明:

上ノ k^* ヲ適當ニトツテ有限群 G ノ absolutely irred. ナ表現ガミナ k^* ノ中ニアル様ニスル。(以下簡單

ノタメ Of, order n ハ体ノ標数ヲ割レナイトスル。〔判
レル場合ニツイテハ前述拙著ヲ参照サレタイ〕。我々、関
心ハ今ムシロ $comm. \rightarrow non-comm.$ ニアル、ガカ
ラ)。ソノ様ナ $k^* = \text{オケル } irred. \text{ 表現 } S \rightarrow U_S$
ヲトル。

シカラバ $U_S U_T = U_{ST}$, 即チ $U_T' U_S' = U_{ST}'$ デアル。
(タツシユハ *transposition*)。シカルニ、コレハ関係
(1) ノ *special case* デアル。故ニ regular matrix
 A in P^* ガアツテ

$$U_S' = A^{-1} A^S \quad \text{即チ} \quad A^S = A U_S'$$

デアル。即チ $A = (a_{ij})$ トスレバ

$$(2) \quad (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})^S = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) U_S'$$

從ツテ、マタ

$$(3) \quad \begin{pmatrix} a_{i1} \\ \vdots \\ a_{in} \end{pmatrix}^S = U_S \begin{pmatrix} a_{i1} \\ \vdots \\ a_{in} \end{pmatrix}$$

デアル ((2) カラ (3) ヲ出ス) = U_S ガ k^* ノ行列ナルコト
ガ使ツテアル)。

今 r^2 個ノ P^* 元 a_{ij} ガ $\Phi^* =$ ~~異~~ 異レテ 左側 一次
独立ノコトヲ云フ。

假ニ

$$(4) \quad \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r g_{ij} a_{ij} = 0 \quad (g_{ij} \in \Phi^*)$$

トスル。

他方 $U_E, U_R, \dots, U_T$ / $\mathcal{L}^*$ = 於ケル適當な linear comb. ヲツクれば任意 $\mathcal{L}, \mathcal{L}'$ = 對シテ行列單位 $\varepsilon_{\mathcal{L}\mathcal{L}'}$ が得ラレル。ヨツテ今 $\varepsilon_{11} = \text{ナルノヲトリ}$ 、ソレニ相當スル $E, R, \dots, T$ / linear comb. ヲ $a_{ij} = \text{ホドコセバ (2) スハ (3) = ヨリ}$

$$a_{i1} \rightarrow a_{i1}, \quad a_{ij} \rightarrow 0 \quad (j \neq 1)$$

故ニ (4) カラ

$$(5) \quad \sum_{i=1}^r \varphi_{i1} a_{i1} = 0$$

トナル。又 $\mathcal{K} = \varepsilon_{1j'}$ = 相當スルノヲホドコセバ (5) カラ

$$\sum_{i=1}^r \varphi_{i1} a_{ij} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, r)$$

トナル。即チ

$$(\varphi_{11}, \varphi_{21}, \dots, \varphi_{r1}) A = 0$$

デアル。然ルニ A ハ regular デカラ $\varphi_{11}, \dots, \varphi_{r1} = 0$ 。同様ニシテ他ノ φ モミナ 0。即チ a_{ij} ハ左側ニ Φ^* = 對シテ一次独立デアル。

ヨツテ a_{ij} デ張ラレタ Φ^* -左加群

$$m = \Phi^* a_{11} + \dots + \Phi^* a_{1r} + \Phi^* a_{21} + \dots + \Phi^* a_{rr}$$

ヲ考ヘル。シカルトキ r 個ノマトメテミレバ各 φ_j ノ (右) 加群デソレニヨル表現ガ $U_S = \text{ナルコトヲ (3) ハ示シテキル}$ 。スナハテ m ハ U_S ヲ define スル如キ Φ^* - φ_j -

加群 r 度 r 個ノ直和デアル。

以上ノコトハアラユル $irred$ ナ表現ニツイテ云ヘル。
ヨツテ Φ - $\mathcal{O}_f$ -加群 $P^* = \mathcal{O}_f$ ノ表現ハ正規表現ヲ含ミ
従ツテ次数ヲ考ヘレバ一致スルコトニナル。

P^* ヨリ Φ - $\mathcal{O}_f$ -加群 $P = \mathcal{O}_f$ ノハ容易デアル。(Krull-
Remakノ定理ニヨル)

群環ガ $semi-simple$ ノ場合ニハ U_s r $irred$ ノカ
ハリニ、正規表現ノアル直既約成分ヲトリ、ソノ時 r^2 個ノ
 a_{ij} スベテガナク。適當ナ個ノ横行 (タビシオハ $U_s =$
對應スル (Brauer-Nesbittノ意味デ) 既約表現ノ次数)
ニ属スル a_{ij} ガ一次独立ノコトガ云ヘルノデアル。悉ク
ハ省ク。(ソノ既約成分ガ最大直可約成分ナルコトヲ使用ス
ルノデアル)

附記 I: 上ノ証明デハ $b^E, b^R, \dots, b^T$ ナル 左 basis
ノ存在ヲ証明シタ。同様ニ同ジ形ノ 右 basis ノ存在ガワカ
ル。然シ同時ニ左右ノ basis ニナルヤウニ出来ルノダラ
ウカ?

附記 II: 上記ニ $Speiser$ ノ定理ノ拡張ヲ使用シタ、
我々ノ目的ニハコノ形デヨイノダガ、定理自身トシテハ

$$(6) \quad C_S^S C_T^T C_{TS}^{-1} = D_S^S D_T^T D_{TS}^{-1}$$

ナラバ $C_S = A^T D_S A^S = \text{ナル}$ ノ形ニ云ヒタイノデアル。事
實 $comm.$ ナ P デハ云ヘル事ハヨク知ラレテキル。シカシ
ソノ場合ノ証明ハ $A = \sum_s P^S D_S^{-1} C_S$ ナル形ノ行列ヲ考ヘ、

コレが *regular* = ナルヤウ = $\mathcal{P}$ マキメル / デアル。
 (大島: 数論 20 参照), シカシコレデハ $\mathcal{P}^S$ が (6) ト *com-*
mutative デナイト駄目デ旨ク我々ノ場合 = 行カナイ。
 然ラバ, 構造論的ニ証明トナルト, ソレニハ上記ノ *crossed*
product $\mathcal{R}$ = 相當スル *ring* が 奇ニ偶ヘルモ / デナイ
 ト困ル。即チ *factor set* (6) が適當デ $\mathcal{R}$ = 相當スル
ring が *simple* デナクトモ, *semi-simple* 或ハ
 ソウデナクトモ *uni-serial ring* 乃至 *generalized*
uni-serial ring (*Frobeniusan algebras II*,
 参照)。寧トラソレノ *Module* ノ構造がワカルカラ出素
 ル。シカシ *gen. uni-serial ring* が現在 (有限)
moduli ノ構造, *Über-sicht* / 得ラレル最モ一般
 ノ *ring* ノ様 = 思ハレ, ソレ以外ノ一般ノ *ring* ノ場合
 がトドウモ旨ク行カナイ。何カ旨イ工夫がアルト出素ルノ
 がラット思フノだが、御教示ヲ得レバ幸甚デアル。