OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	Linear, semi-ordered space ニツイテ
Author(s)	深宮, 政範
Citation	全国紙上数学談話会. 1940, 205, p. 419-425
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74819
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

889. Linear, semi-ordered Space ニツイテ

深宮政雄(阪大)

E 7 linear, semi-ordered space トシ, semi-order が $X > \theta$ デ定義サレテオルトスル。

1°. $X > \theta \longrightarrow X \neq \theta$

2°. $X > \theta,\ y > \theta \longrightarrow x+y > \theta$

3°. 凡テノ $X \in E$ ニ對シテ $X_+ > \theta$ ガ定義サレ

$X_+ \geqq X$, 且ツ $X' \geqq \theta$, $X' \geqq X$ ナラバ $X' \geqq X_+$

$(-X)_+ = X_-$ トスレバ $X = X_+ - X_-$ ト unique ニ分解サレル。且ツ 3° ハEが lattice デアルコトヲ示ス。

$|X| = X_+ + X_-$ トスル。

4° $\lambda > 0$, $X > \theta$ ナラバ $\lambda X > \theta$

5° $u > \theta$ ガ存在シテ（unit!）凡テノ $X \neq \theta$ ニ對シテ $-tu < X < tu$ ナル様ナ $t > 0$ ガ存在スル。カヽル t ノ g.l.b. ハ > 0 ($X \neq \theta$)

5° ノ性質カラ空間ニ"norm"ヲ入レルコトガ出來ル。夫ニハ 5° ニ於ケル t ノ g.l.b. ヲ $\|X\|_u$ トスレバ良イ。從ツテEハ"norm"ノツイタ semi-ordered space トナル，之レヲ E_u デ表ハス。實ハ

Cor. $X \geqq \theta$, $y \geqq \theta$ ナラバ

$$\|X \cup y\|_u = \max(\|X\|_u, \|y\|_u)$$

ガ 5° カラ出テ來ル，從ツテ E_u ハ abstract (M) ト考ヘラレル。

Cor. ノ証明ハ殆ンド明ラカデアル。$\theta \leqq X < tu$, $\theta \leqq y < su$ ナラバ $\theta \leqq X \cup y < \max(t, s)\, u$, $\|X \cup\|_u \leqq \max(\|X\|_u, \|y\|_u)$, 一方 $\max(\|X\|_u, \|y\|_u) = \|X\|_u$ トシ; t_0 ヲ $X \cup y < t_0 u$, $t_0 < \|X \cup y\|_u + \varepsilon$ トスレバ $X \leqq X \cup y < t_0 u$ デアルカラ $\|X\|_u < \|X \cup y\|_u + \varepsilon$, 茲

ニ モハ任意デアルカラ $\|x\|_u = \|x \cup y\|_u$.

斯ル abstract M-space ハーツノ bicompact ナ空間ノ上ノ凡ユル連続函数ノ空間ト isometric, lattice-isomorphic デアルコトガ前ニ角谷静夫氏ニ依ツテ示サレタ。(1) 夫ト独立ニ M.-S. Krein(2) ガ矢張リ同一ノ事実ヲ証明シテ居ル、論文ハ定理ト必要ナ lemmas 等ヲ述ベテ居ルダケデ全部ハ分ラナイガ，大体証明ヲ考ヘルコトガ出来タ様ニ思フノデ，要点ダケ述ベテ見タイ。

吾々ハ今ーツノ假定ヲ設ケル。(之ハ実際証明ガデキルノデアル)。

6°. E_u ハ $\|x\|_u$ ニツイテ complete デアル。

E_u ハ Banach space デアルカラ $\bar{E}_u$ ヲ考ヘル。$f \in \bar{E}_u$ ガ $x \geqq \theta$ ナラバ常ニ $f(x) \geqq 0$ デアレバ "non-negative" トイヒ，$f \geqq \theta$ ト記スト $\bar{E}_u$ ハ又 linear, semi-ordered space ニナル。$f > \theta$ ナラバ

$$\|f\|_u = \sup_{-u<x<u} |f(x)| = f(u)$$

トナルコトハ明カデアル。

$f > 0$, $f(u) = 1$ ナル凡ユル $f \in \bar{E}_u$ ノ集合ヲ H_u デ表ハス。

証明ノ方針　角谷氏ノ方法モ，M.-S. Krein ノ方針モ共ニ E_u ヲ $\bar{E}_u$ ノ上ノ連続函数ニヨッテ表現シヨウトス

---

(1) 角谷静夫氏，学士院記事，XVI－NO.3. pp. 63-67.

(2) M.-S. Krein, C.R.U.R.S.S., XXVII, NO.5

ルノデアル、即チ $X \in E_u$ ニ対シテ $f(x) = X(f)$ (X ハ $= g(f;X)$ ナル $\bar{E}_u$ ノ上ノ continuous function ヲ考ヘテ之ヲ X ニ対応サセルコトニ依ラウトスルノデアル。然シ $\bar{E}_u$ 全体デ考ヘテヘ点が多スギルノデ —— 之ハ lattice-isomorphic ニナラナイ ——。ソノタメニ f ノ一部分 S ヲ考ヘ、X ガ $S \subset \bar{E}_u$ = functional トシテノ weak topology ヲツケル。Krein ノ場合最モ大事ナ部分ハ次ノ定理デアル。

定理(i) H_u ハ closed, bounded, regularly convex デアル。

(ii) H_u ノ extreme points ノ集合 S_u ハ leer デハ無イ。

(iii) $f \in S_u$ ナルタメノ必要十分ナ條件ハ $|f(x)| = f(|x|)$, $X \in E_u$ ナルコトデアル。

注意 Banach-space E ノ conjugate space $\bar{E}_u$ ノ部分集合 K が regularly convex デアルト云フノハ、任意ノ $g \in K$ ニ対シテ $\sup_{f \in K} f(X_0) < g(X_0)$ ナル $X_0 \in E$ が存在スルコトヲ云フ。regularly convex ナ集合ハ又 convex デアル。

f が convex-set K ノ extreme point デアルト云フノハ K ニ属スル segment ノ中点ニナラナイコトヲ云フ、即チドンナ $g, h \in K$ ニ対シテモ $f \neq \frac{1}{2}(g+h)$.

証明(i) H_u ハ $f(u) = \|f\|_u =$ ノヲ満足スル故有界デアル、又 H_u ハ closed デアルコトモ明ガデアル。

モシ $f_0 \in \bar{E}_u$ ニ對シ任意ノ $\varepsilon>0$ ニ對シテ $\|f_0-f\|_u<\frac{\varepsilon}{2}$, $f\in H_u$ トル f ガ常ニ存在スルトスレバ $\theta<x<u$ ナラバ

$f_0(x)-f(x)>-\varepsilon$, 從ッテ $f_0(x)>f(x)-\varepsilon>-\varepsilon$ ガ成立ツ、ヨッテ $f_0(x)\geqq\theta$, 且ツ $f_0(u)=1$, 從ッテ $f_0\in H_u$, H_u ハ closed.

H_u ガ regularly convex デアルコトモ直グ分ル. $g\in H_u$ デアレバ $g\not\equiv\theta$ 又ハ $g(u)\neq 1$ デアル. 例ヘバ $g(u)<1$ デアレバ x_0 (定義1) トシテ $-u$ ヲトレバ良イ。

依ッテ (i) ハ証明サレタ。

(iii) a) $|f(x)|=f(|x|)$, $x\in E_u$ ガ成立スレバ $f=\frac{1}{2}(g+h)$, $g,h\in H_u$ ($g>\theta$, $h>\theta$, $g(u)=h(u)=1$) トキハ $f=g=h$.

証明 $f(x)=g(x)$, $x>\theta$ ダケヲ証明スレバ充分デアル。今 $f(x)=\alpha$, $x\geqq\theta$ トスル. $f(u)=1$ デアルカラ

$f(x-\alpha u)=0$, 從ッテ $f(|x-\alpha u|)=0$.

從ッテ $g(|x-\alpha u|)=0$.

$(x-\alpha u)_+=(x-\alpha u)\vee 0=x\vee\alpha u-\alpha u$,

$(x-\alpha u)_-=(-(x-\alpha u))\vee 0=(\alpha u-x)\vee 0=\alpha u\vee x-x$

從ッテ $g((x-\alpha u)_+)=g(|x-\alpha u|-)=0$ カラ

$g(x\vee\alpha u)=g(\alpha u)=g(x)$, $g(x)=\alpha$

ヲウル. 依ッテ $f(x)=g(x)$, $x>\theta$ 從ッテ凡テノ $x=$

對シテ $f(x)=g(x)$ ガ成立ツ。

注意 $|f(x)|=f(|x|)$, $x\in E$ ハ次ノ條件ト equivalent デアル。

$$f(x\vee y)=f(x)\vee f(y),\quad f(x\wedge y)=f(x)\wedge f(y)$$

b) ドンナ $g,h\in H_u$ = 対シテモ $f=\frac{1}{2}(g+h)$ デアレバ $f(|x|)=|f(x)|$, $x\in E_u$ ガ成立スル。

証明ハ簡單デアル。$|f(x)|=f(|x|)$, $x\in E_u$ ガ成立シナカッタトスレバ

$x,y>\theta$, $x\wedge y=\theta$, 且ツ $f(x)>0$, $f(y)>0$

ナル x,y ガ存在スル。今任意ノ z = 對シテ

$$z_1=z\wedge y,\quad z_2=z-z_1\ (=z-z\wedge y)$$

トオクト $z_1\geqq\theta$, $z_2\geqq\theta$, $z_1\wedge z_2=\theta$, $z_1+z_2=z$

次= $z\geqq\theta$ = 對シテ

$$g'(z)=f(z_2),\qquad g(z)=\frac{g'(z)}{g'(u)}$$

$$h'(z)=f(z_1)\qquad h(z)=\frac{h'(z)}{h'(u)}$$

$$g(w)=g(w_+)-g(w_-),\quad h(w)=h(w_+)-h(w_-),\quad w\in E_u$$

ト定義スレバ $g,h\in H_u$ 且ツ $f=\rho g+(1-\rho)g$, $0<\rho<1$ ヲウル。依ッテ $g_1=2\rho g+(1-2\rho)h$, $h_1=h$ トスレバ, $f=\frac{1}{2}(g_1+h_1)$, g_1,h_1 ヲ H_u トナッテ假定ニ矛盾スル。

以上ニ依ッテ (i), (iii) ガ証明セラレタ。

次=(ii) H_u ノ extreme points ノ集合 S_u ハ leer デハナイコトヲ証明シナケレバナラナイ。之レハーツノ定理ヲ用フレバ容易デアル。[3] Krein ハ之レヲヨリ一般ナ定理ヲ証明シテ，ソレカラ導イタ[4] 即チ

定理 Banach 空間 E ノ conjugate space $\bar{E}$ ノ regularly convex subset K ハ必ズ extreme points ヲモツ.

コノ定理モ前述ノヤウニ有界ナ場合ハ容易デアル.

(續ク)

---

3) Šmulian, Rec. math., 7-3 (1940).

4) Krein-Milman, Studia Math. 9(1940) (未着)