



Title	Quasi-field ノ Normal bases ニツイテ, II
Author(s)	中山, 正
Citation	全国紙上数学談話会. 1940, 206, p. 446-452
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74824
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

894. Quasi-field / Normal basis ニツイテ, II

中山 正 (阪大)

前号ノ談話デ K ノコトヲ証明シタ。 P ヲ quasi-field. G ヲ outer automorphism ノ有限群 (ソノ order n). Φ ヲ invariant elements ノナス sub-quasi-field トスル。シカラバ Jacobson = ヨツテ $(P: \Phi) = n$ デアルガ、ソレノミナラズ P ハ $\Phi =$ 対シテ normal basis

$$b^E, b^S, \dots, b^T \quad (G = \{E, S, \dots, T\})$$

ヲモツ。

ソノ証明ニ於テ簡單ノタメ G ノ order n が characteristic デアレナイ。即チ group ring が semi-simple ノ場合ダケマツテ、ソウデナイ場合ハ (cleaving ノ semi-simple ノ場合カラ modify シテ、ソウデナイ場合ニシテ On Frobeniusan algebras, II ノ中ノ論法デ) 類似ニ 簡單ニ出来ルト ダケ述ベテオイタ。然レサウ簡單デモナク、事實小生自身後カラ色々補足シナケレバナラナイ点ニ氣ツイタリシタノデ、ソノ場合ノ証明ヲ以下ニ述ベル。

先ツ、以前ノ如ク P ノ核心ヲ Z トシ、 $K = \Phi \cap Z$ トスル。更ニ K ノ有限拡大 K^* ヲトリ

$$P^* = P_{K^*}, \quad \Phi^* = \Phi_{K^*}$$

ヲツクル。擴大ハ左ヲ基礎ニシテデアル。ソノトキ、例

ノ Speiser ノ定理ノ拡張ヲ更ニ extend シテ

Lemma. C_S ($S \in \mathcal{O}_f$) $\Rightarrow P^*$ = オケル regular
+ 行列ノ system ヲ

$$(1) \quad C_S C_T^S = C_{TS}$$

ヲ満足スル。シカモ C_S + ル system ハ

$$(2) \quad C_S = \begin{pmatrix} D_S & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

ナル形ニ reduce サレテキルトスル。シカラバ P^* ノ中
ニ regular + 行列 A ヲ $C_S = A^{-1} A^S$ ヲ満シ、シカ
モ

$$(3) \quad A = \begin{pmatrix} B & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \quad (\text{上ノ } C_S \text{ ト同ジ reduction})$$

トナツテキルモ、ガ存在スル。

(証明) 例ノ如ク

$$\gamma^* = u_E P^* + u_S P^* + \dots + u_T P^*$$

+ ル crossed product、ヲ考ヘル。コレハ左ヲ核
心ニモツ simple ring デアル。今 C_S ノ次数ヲ γ 、 D_S
ノソレヲ g トスル。シカルトキ

$$W = w_1 P^* + \dots + w_g P^* + \dots + w_r P^*$$

+ ル γ 次元ノ vector-space ヲ考ヘル。コノ最初
ノ g 個ノ $w_1, \dots, w_g$ テ張ラレタ subspace ヲ ∇ ト
カリ。今 γ^* ノ元 $u_S = \wedge$ semi-linear transf.
 $\sigma = (C_S, S)$ ヲ、 $\xi (\in P^*) = \wedge v \rightarrow v \xi + \wedge$

transf. に対応サセレバ $\forall \wedge \gamma^*$ -右加群ナル。ソ
レヲ W_1 ト書ク。然ル C_S ガ上ノ形 = reduce サレテキ
ルノデ、 ∇ ナル部分カ認容部分群ナル。ソレヲ ∇_1 ト書
ク。 $\nabla_1 \subseteq W_1$.

他方 $\{C_S\}$ ナル system ノ代リ = $\{E_S = E\}$ ナ
ル system ヲ考ヘル。(γ 次ノ単位行列) . ソウスレバ
 $U_S = (E, S)$ ヲ對應サセルコト = ヨツテ W ヲマハリ
 γ^* -加群ト考ヘルコトが出来、シカモ ∇ ハマハリ認容デ
アル。コノ意味デ W, ∇ ヲソレゾレ W_0, ∇_0 ト書ク。

單純環 γ^* ノ右加群 W_0 ト W_1 ハ互 = 同型、同様 = ∇_0
ト ∇_1 ガ互 = 同型デアルガ、コノ場合更 = ∇_0 ト ∇_1 ノ間
ノ同型對應ヲ拡張シタ W_0 ト W_1 ノ間ノ同型對應ヲ得ラレ
ル。何故ナラ γ^* ノ加群トシテ完全可約カカラデアル。
コノ場合ノ對應ノ行列ヲ A トスレバ、ソレガ (3) ナル形ニ
ナリ、我々ノ要求ヲ満ス。

上記ノ Speiser 定理ノ refinement ヲ使ツテ
次ノ如ク = 進ム 代トシテ O_f ノ絶対既約 + 表現カスベテ在
ル様ナ体トスル。ソノ一ツヲ $S \rightarrow G_S$ トシ U_S ヲ Branes-
Reshitt ノ意味デ $G_S =$ 對應スル正規表現ノ直既
約成分トスル。

$$U_S = \begin{pmatrix} G_S & & 0 \\ & * & \\ & & * \\ * & & G_S \end{pmatrix}$$

$U_S U_T = U_{ST}$ 故カラ $U'_T U'_S = U'_{ST}$. 且ツ U'_S ハ

$$U'_S = \begin{pmatrix} G'_S & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

ナル形デアアル. ヨツテコレヲ $\{C_S\}$ トシテ Lemmaヲ
使ヘバ (3) ノ形デ (B ノ大キサハ G'_S ノソレト同ジ) ア
ツテ

$$(4) \quad U'_S = A^{-1} A^S \quad \text{即チ} \quad A^S = A U'_S$$

ナル regular matrix A in P^* カ存在スル.
勿論 B ノ部分 (3) ヲ見ヨ) $\in$ regular デアル.

ソシテ

$$(5) \quad B^S = B G'_S$$

デアアル. $A = (a_{ij})$ トスレバ (4) 及ビ (5) ハ

$$(6) \quad (a_{i1}, \dots, a_{ir})^S = (a_{i1}, \dots, a_{ir}) U'_S$$

$$(7) \quad (a_{i1}, \dots, a_{ig})^S = (a_{i1}, \dots, a_{ig}) G'_S$$

$$(i = 1, 2, \dots, g)$$

トナル. 今 B ノ中ノ g^2 個ノ元 a_{ij} ($i, j \leq g$) カ 左側 デ
 P^* = 對シテ一次独立ノコトヲイフ. ソレハ前号デ述べタノ
ト全ク同様デ (7) ト B カ regular ナコトカラ出ル.

次ニ (6) ヲ見ルニ, ソレヲ

$$(8) \quad \begin{pmatrix} a_{i1} \\ \vdots \\ a_{ir} \end{pmatrix}^S = U_S \begin{pmatrix} a_{i1} \\ \vdots \\ a_{ir} \end{pmatrix}$$

トシテオケバ, $a_{i1}, \dots, a_{ir}$ デツクアレタ P^* - 左加群

が同時 ϕ -点加群デアリ, ソレヲ $\mathcal{M}_i$ トスレバ $\mathcal{M}_i$ が U_i
 = 属スル表現重^{*} ϕ -加群 $U = \text{homomorphic}$ + 事
 ヲ知ル. (シカモ $U = \text{オイテ } G_S = \text{對應スル submodule}$
 の image が丁度 $a_{i1}, \dots, a_{ig}$ デツクラレタ部分デア
 ル). 今 $i = 1, 2, \dots, g$ トシテ g 個ノ $\mathcal{M}_i$ ヲヲル. ソノ
 和 (P^* ノ中デツクラレタ) ヲ

$$\mathcal{M} = (\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \dots, \mathcal{M}_g)$$

トスレバ $\mathcal{M}$ ハ

$$\mathcal{M} = U_1 + U_2 + \dots + U_g$$

ナル直和 = homomorphic デアル. 但シ U_i ハすべて U
 = 同型ナル表現加群トスル. 今 U デ表現 U_S ノ最初ノ成分
 $G_S = \text{對應スル部分群ヲ}$ $\mathcal{M}_i$ トスル. ソシテ U_i デソレ = 相
 當スル部分加群ヲ $\mathcal{M}_i$ トスル. シカラバ

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 + \dots + \mathcal{M}_g$$

ナル $\mathcal{M}$ ノ部分加群が丁度上ノ homomorphism デ B ノ g^2
 個ノ元デ張ラレタ部分群 ($\mathcal{M}$) = map サレル. シカル
 = B ノ g^2 個ノ元ハ重^{*} = 對シテ左ノ次独立デアルカラ,
 homomorphism ハ $\mathcal{M}$ カラソコヘノ所デハルコト $1-1$
 ノ同型對應デアル. シカル = $\mathcal{M}$ ハ $\mathcal{M}$ ノ最大完全可約部分群
 ヲ含ム (モシ重^{*} が semi-simple ナラ丁度一致スル).
 故 = $\mathcal{M}$ カラ $\mathcal{M}$ ヘノ全体ノ homomorphism $\approx 1-1$
 デ同型デナケレバナラナイ。

以下 G_S トシテ ϕ ノコトナル既約表現全部ヲマゴカン
 テ以前ノ如ク論ズレバヨイ. 要点ハ正規表現ノ直既約成分ノ

構造論トソレカラ *Speiser* の定理 / refinement が
 アル。実ハコノ refinement がハジメ果がツカナカッタ
 (汗顔ノ至リデス)。コレヲ使ハナイデモ $P^* = P_{f^*}$ が
quasi-field デアル場合 (タトヘバ $f^* = f$ デヨイ
 トキ) ハ困難ナイ。即チ A トシテ任意ノ形。必ズシモ (3)
 ニナツテキナイモノヲトリ、ソノ始メノ g 級列ノ中ニ適當
 ナ *regular* ナ g 次ノ小行列カアルカラ、ソレヲ B ノ代
 リニツカヘバヨイ。

或ヒハモ少シ一般ニシテ、 $Z^* = Z_1^* + Z_2^* + \dots + Z_m^*$
 ナ Z^* ノ互ニ *conjugate* ナ体 Z_ν^* ヘノ分解シタトキ (Z/f
 ハ *normal* ナ *separable* ノコトニ注意) $PZ_\nu^* = P^* Z_\nu^*$
 カミナ *quasi-field* ナラ同様ニ議論出来ル。スナハ
 チ $Z_\nu^* = Z e_\nu^*$ トスル。タビニ e_ν ハ *idempotent*
element トスル。先ヅ任意ノ形ノ A ヲトリ、ソノ PZ_ν^*
 ニ關スル component $e_\nu A$ ヲ考ヘル。コレハ *quasi-*
field PZ_ν^* ノ中ノ *regular* ナ行列デアアル。故ニ始メ
 ノ g 級列ノ中ニ g 次ノ *regular* ナ小行列カアル (*re-*
gular トハ PZ_ν^* ノ中デノ意)。タソレニ對應スル所ノ
 A ノ小行列ヲ B_ν トスル。シカラバ $e_\nu B_\nu$ が PZ_ν^* デ *regular*
 デアル。ヨツテ $(e_\nu B_\nu)^S$ ハ $(PZ_\nu^*)^S = e_\nu^S P^*$ ノ中デ
regular。他方

$$(e_\nu B_\nu)^S = e_\nu^S B_\nu^S = e_\nu^S B_\nu G'_S$$

ヨツテ $e_\nu^S B_\nu G'_S$ ハ $e_\nu^S P^*$ デ *regular*。所ガ G'_S ハ *regular*
 デカラ $e_\nu^S B_\nu$ が $e_\nu^S P^*$ デ *regular* デアル。然ルニ S カ

O ヲウゴケバ $e_1^s, \wedge e_1, \dots, e_m$ ノ上ヲ (一般ニハ重複
 シテウゴリ。即チ $B, \wedge PZ_1^*, \dots, PZ_m^*$ ナルスベテノ
 成分ニ對シテ *regular*。故ニ P^* ノ行列トレテ *regular*
 デアル。故ニ再ビ $B, \wedge B$ ノ代リニ使ヘバヨイ。(On
Frobeniusian algebras. II. デ扱ツタ可換体ノ場合
 ハコノ場合ノ中ニ入ル)

シカシ一般ノ場合ニハヤハリ A ヲ (3) ノ形ニハジメカラ
 トツテオカナイト旨ク行カヌ様ニ思フ。マタソノ方が自然デ
 アリ、ヨイヤリ方カト思フ。