



Title	Linear semi-ordered space二就イテ
Author(s)	深宮, 政範
Citation	全国紙上数学談話会. 1940, 207, p. 467-473
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74827
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

897. Linear semi-ordered space = 就イテ

深 宮 政 範 (阪大)

戦争デ未着 / *Studia Math.*, 9(1940) = Krein-Milman が次ノ定理ヲ証明シテキル。

定理 I B -空間 E / 共軛空間 $\bar{E}$ 内 / 有界¹⁾,
regularly convex + 部分集合, *extreme points*
ヲ有ツ。

茲 = 集合 $K \subset \bar{E}$ が *regularly convex* デアルト
云フ, ハ任意ノ $g \in K$ = 対シテ $\sup_{f \in K} f(x_0) < g(x_0)$ ナ
ル $x_0 \in E$ が存在スルコトヲ云フ。 K が *convex set* デ
アルトキ $f \in K$ がドンナ $g, h \in K$ = 對シテモ $f \neq \frac{1}{2}(g$
 $+ h)$ デアレバ f ハ K / *extreme point* デアルト
云フ。

最近吉田耕作氏が *regularly convex set* ト
convex set トノ間ノ *duality* ヲ注意サレテ,
elegant + *interpretation* ヲ與ヘラレタ。夫
レハ談話 = ヨツテ紹介サレキルノデ是非参照
サレタイ。

茲デハ Krein-Milman ノ定理ノ証明ヲ述ベタイ。

1) 有界ト云フ條件ハ實際必要デアツタ。例 $x_0 \in E$ ヲ fix
シテ $f(x_0) = 0$ ナル $f \in \bar{E}$ 全体ノ集合

夫=ハ transfinite induction を用フルノデアアルガ、
次ノ定理が必要デアアル。

定理 2 ²⁾ E ノ有界, convex ナ集合 K ガ re-
gularly convex デアルタメノ必要十分ノ条件ハ K ガ
 E ノ functional トシテノ weak topology = 関
シテ bicompact ナ事デアアル。

コノ定理=ツイテハ後デ別=直接ノ証明ヲスル, Šmulian
ノ証明デ夫デ充分ナノデアアルガ、後述ベルガガズット簡
潔デアルト思フ。

定理 1 ノ証明:

凡テノ $f \in K$ ハ $\|f\| \leq 1$ ト假定スル。Zermelo's
axiom を用ヒテ $x \in E$, $\|x\| \leq 1$ 全体ヲ well-order
シテ

$$(1) \quad x_0, x_1, \dots, x_\alpha, \dots \quad (\alpha < \eta)$$

トスル (ソノ仕方ハ unique デハ無イ)

定理 2 = ヨツテ K ノ上テノ continuous $f(x)$ ($x \in E$)
ハ max. min を attain スル。今

$$\sup_{f \in K} f(x_0) = f_1(x_0), \quad f_1 \in K$$

ノ集合ヲ K_1 トスル。 K_1 ガ唯一点 f_1 ガケカラ成レバ明カ
= f_1^0 ハ extreme point デアル。 (ドンナ $g, h \in K$
= 対シテモ $f_1^0(x_0) > g(x_0), h(x_0)$; 従ツテ $f_1(x_0) \neq$

2) V. Šmulian, Über lineare topologische
Räume, Rec. Math. Moscou, 7(1940)

$$\frac{1}{2}(g(x_0) + h(x_0))$$

$\exists \alpha \in K_1$ が一点以上含ンデ居レバ $f(x_\alpha) \neq \text{const} (f \in K_1)$
 ナル最初ノ α ヲ トリ, $\alpha = \alpha_1$ トシテ

$$\sup_{f_1 \in K_1} f_1(x_{\alpha_1}) = f_2(\alpha_1), \quad f_2 \in K_1$$

ナル集合 K_2 ヲ作ル, K_2 ハ convex, closed set,
 $\subset K_1$. K_2 が一点デアレバ夫ハ K_1 extreme point ナ
 アルコトハ明カデアアル。 K_2 が一点デナケレバ $f(x_\alpha) \neq$
 $\text{const} (f \in K_2)$ ナル最初ノ α ヲ α_2 トスレバ

$$\sup_{f_2 \in K_2} f_2(x_{\alpha_2}) = f_3(\alpha_2), \quad f_3 \in K_2$$

ナル convex, closed set K_3 ヲ作ル。

一般 = convex, closed sets ノ seq. $K \supset K_1 \supset K_2 \supset \dots \supset K_\xi \supset \dots$ が $\xi < \zeta$ ($< \eta$) ナル凡テ, $\xi = \text{對}$
 シテ定義サレタスル。

ξ_1 が limit ordinal ナイトキ:

$f(x_\alpha) \neq \text{const} (f \in K_{\xi_1-1})$ ナル様ナ最小ノ α ヲ
 α_{ξ_1-1} トシ, $\sup_{f \in K_{\xi_1-1}} f(x_{\alpha_{\xi_1-1}}) = f_{\xi_1}(x_{\alpha_{\xi_1-1}})$,
 $f_{\xi_1} \in K_{\xi_1-1}$ ナル f_{ξ_1} 全体ノ作ル convex, closed set
 K_{ξ_1} ヲ作ル。

ξ_1 が limit ordinal ノ時: $K \supset K_1 \supset K_2 \supset \dots \supset K_\xi$
 $\supset \dots$ ($\xi < \xi_1$) ハ closed set ノ monotonic
 sequence ナアルカラ $\prod_{\xi < \xi_1} K_\xi = K_{\xi_1}$ ハ leer ナハ無

1. 此ノ $K_{\varepsilon'}$ ヲ前ノ $K_{\varepsilon, -1}$ ノ代リニ用ヒテ同様ニ K_{ε} ナ
定義スル。

以上ニヨツテ $\varepsilon < \eta$ ナル凡ユル ε ニ對シテ *convex*,
closed sets K_{ε} ガ定義サレ, $K \supset K_1 \supset K_2 \supset \dots$
 $\dots \supset K_{\varepsilon} \supset \dots$. 依ツテ $\prod_{\varepsilon < \eta} K_{\varepsilon}$ ナ作レバ之ハ *leer*
デハ無イ (*bicomcompact*!)

且ツ $\prod_{\varepsilon < \eta} K_{\varepsilon}$ ハ唯一ノ点カラ成立ツ。何トナレバ $\prod_{\varepsilon < \eta} K_{\varepsilon}$ ガ

2 点 f, g ナ含メバ $f(x) \neq g(x)$ ナル $x = x_{\alpha}$ ガ存在
スル。今 $\alpha < \alpha_{\varepsilon}$ トスレバ $f, g \in K_{\varepsilon}$ ニヨツテ $f(x_{\alpha}) = g(x_{\alpha})$
トナル筈デアレカラ

$f_0 = \prod_{\varepsilon < \eta} K_{\varepsilon}$ ハ *extreme point* デアル。任意ノ

$g, h \in K$ ナトレバ $g, h \in K_{\varepsilon}$. ナルヤウナ最小ノ ε ガ存
在スル。従ツテ $\alpha > \varepsilon$ ナラバ $g(x_{\alpha}), h(x_{\alpha}) < f(x_{\alpha})$,
従ツテ $f \neq \frac{1}{2}(g+h)$.

2. 定理. $\bar{E}$ ノ有界, *convex* ナ集合 K ガ *regu-*
larly convex デアルタメノ必要ナ分ナ條件ハ

K ガ $\bar{E}$ ノ *functional* トシテ *weak topology* ニ關シテ *bicomcompact* ナ事デアアル。

証明. 便宜ノタメ $\|f\| \leq 1$ ($f \in K$) ト假定スル。

$\bar{E}$ ノ *functional* トシテ *weak topology* ナ考
ヘルコトハ次ノ事ト同等デアアル。

S ナ $\|x\| \leq 1$ ナル $x \in E$ ノ集合トシ, S ノ上ニ定義
サレタ凡ユル有界ナ実數値函数 ($|g(x)| \leq 1$) 全体ノ

集合 $\mathcal{B}(S)$ デ表ハス $\mathcal{B}(S) =$ 對シテ *topology* テ
近傍系

一般 夫ニハ所謂 *regularly convex* ナ集合ハ
weakly closed ナアルコトヲ考ヘレバ, $K \subset \mathcal{B}(S)$
テ, *closed* — 従ツテ *bicompact* ナ *sub set* ナ
アルコトガ云ヘル。 (例ヘバ $f \in \bar{E}$ ガ K ノ *condensation*
point ノ一ツトシ, 且ツ $f \in K$ トスレバ, 假定カラ
 $\alpha = \sup_{f' \in K} f'(x_0) < f(x_0) + \epsilon$ $x_0 \in E$ ガアル。 ($\|x_0\|$
 ≤ 1)。 従ツテ $f(x_0) - f'(x_0) \geq f(x_0) - \alpha > 0$
($f' \in K$), 故ニ $|f(x_0) - g(x_0)| < \frac{1}{2}(f(x_0) - \alpha) + \epsilon$ f
ノ近傍ハ K ト *disjoint* トナル)。

逆ニ K ガ $\mathcal{B}(S)$ テ *bicompact* ナラバ *regularly*
convex

$$\{U\} \quad U = U(f_0; x_1, x_2, \dots, x_n; \epsilon)$$

$$= E_{f \in B_S} [|f_0(x_i) - f(x_i)| < \epsilon, \quad i=1, 2, \dots, n]$$

ニヨツテ定義スレバ $\mathcal{B}(S)$ ハ区間 $-1 \leq t_x \leq +1, x \in S$
ノ積空間ト *homeomorphic* ナ, 従ツテ *bicompact*
top. space トナル。 特ニ $\mathcal{B}(S)$ ノ中ニ $\{f(x)\}$,
 $f \in E$ ($\|f\| \leq 1$) ナル如キ全体ハ $\mathcal{B}(S)$ ノ *topology*
ニツイテ *closed, convex* — 即チ *weakly closed,*
convex — ナ集合トナル。(之ヲ $\mathcal{F}$ デ表ハス)

以下

K ヲ $\mathcal{B}(S) =$ テ考ヘル。

K が *regularly convex* デアルバ K は *bicom-*
pact デアル。 $F(A \times B)$ は *bicom-*
pact デアルカ
 ラ *completely regular* デアル。 従ッテ $g \in K$ と
 ヘルト F ノ上デノ $(A \times B)$ *continuous function*
 $\varphi(f)$ が存在シテ $\varphi(g) = 0$, $\varphi(K) = 1$, $0 \leq \varphi(f) \leq 1$
 トナル。 故ニ g ノ近傍 U ヲ適當ニトレバ $U \cap K$ ハ空集合ト
 ナル。

今 U ヲ

$$U: |g(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

トスル。 $x_1, x_2, \dots, x_n =$ ヨツテ $\mathbb{R}$ 及ビ g ノ n 次元ノ
Euclid 空間 $\mathbb{R}^n =$ 次ノ φ ニ寫像スル。 任意ノ $f \in K$
 $=$ 対応セル $= \varphi(f) = (f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n))$
 ヲ以テスレバ K ハ $\varphi =$ ヨツテ $\mathbb{R}^n$ 内ノ有界, *convex*,
closed ナ集合ニ移サレル。 然ルニ U ノ定義カラ $\varphi(g)$
 ハ $\varphi(K) =$ ハ属サナイ。 従ッテ $\varphi(g)$ ヲ通ル *hyperplane*

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i = 1 \text{ ヲ適當ニトレバ}$$

$$\sup_{(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \varphi(K)} \sum_{i=1}^n \alpha_i \xi_i < 1, \text{ 且 } \sum_{i=1}^n \alpha_i \eta_i = 1$$

$$\text{但シ } (\eta_1, \dots, \eta_n) = (g(x_1), g(x_2), \dots, g(x_n))$$

ナル様ニ出来ル。 依ッテ $x_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ ヲトレバ

$$\sup_{f \in K} f(x_0) < g(x_0)$$

依つて K は *regularly convex* である。