



Title	Regularly convex set 二就テ
Author(s)	吉田, 耕作
Citation	全国紙上数学談話会. 1940, 207, p. 473-478
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74828
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

898. *regularly convex set* = 就テ

吉田 耕作 (阪大)

Banach 空間 E ノ 共軛空間 $\bar{E}$ 内ノ 集合 K が *regularly convex* デアルト云フノハ、任意ノ $f_0 \in K$ ニ對シテ $x_0 \in E$ ガ存在シテ、

$$\sup_{f \in K} f(x_0) < f_0(x_0) \quad \text{ノ 成立ツコトデア$$

ル。定義カラ容易ニワカルヤウニ斯ル K ハ *convex* デナケレバナラナイ。實ハ *regularly convex* ナル概念ヲ導入シタ。Krein ト Smulyan⁽¹⁾ハ

定理 $\bar{E}$ ノ *convex* ナ集合 K ガ *reg. convex* ナタメノ必要且ツ充分ノ條件ハ K ガ *functional* トシテノ *weak topology* ヲ閉カテ居ルコトデアアル。

ヲ証明シテ居ル。尤モ之、二人ハ「*transfinitely closed*」ト云フ言葉ヲ使ツテ居ルが同ジコトデアアル。

以下ニハ E ノ (強) 閉凸集合ト $\bar{E}$ ノ *reg. convex* ナ集合トノ間ニアル「*duality*」ノ存スルコトヲ注意シタイ

(1) *Ann. of Math.* 41, 3 (1940)

ト思フ。之ノ注意ヲスレバ幾何學的ナ意味ガワカルヤウニ
思フ。

① E ノ集合 $X =$ 對シテ, 全テノ $x \in X =$ 於テ $f(x) \leq 1$ ナル如キ $f \in \bar{E}$ 全体ノ集合ヲ X^* . E ノ集合 $Y =$ 對シテ, 全テノ $f \in Y =$ 於テ $f(x) \leq 1$ ナル如キ $x \in E$ 全体ノ集合ヲ Y' . ト置ク。

$$\text{然ラバ } X^{**} = X^*, Y'^{*'} = Y'$$

証明. $X \subseteq X^*, Y \subseteq Y'^*$. 且ツ $X_1 \supseteq X_2, Y_1 \supseteq Y_2$ ナラ
 $X_1^{*'} \supseteq X_2^{*'}, Y_1'^{*'} \supseteq Y_2'^{*'}$ カラ明カ。

② $X^{*'}$ ハ X ノ点ト 0 カラ張ラレル凸集合 $\text{conv}(X, 0)$ ノ (強) 閉被 $\overline{\text{conv}(X, 0)}$ デアル。又 0 ヲ含ム E ノ (強) 閉凸集合 X ハ $X^{*'} = X$ ヲ満足スル。

証明. 定義カラ明ニ $X^{*'} \supseteq \overline{\text{conv}(X, 0)}$. ヨツテ若シ $x_0 \in X^{*'} - \overline{\text{conv}(X, 0)}$ トスルト, Ascoli-Mazurノ定理⁽¹⁾ニヨツテ $f_0(x_0) > 1$ 且ツ $x \in \overline{\text{conv}(X, 0)}$ ナラ $f_0(x) \leq 1$ ナル如キ $f_0 \in \bar{E}$ ガ存在スル。然ラバ $f_0 \in X^*$ デアリ, 従ツテ $x_0 \in X^{*'}$ トナリ矛盾デアル。後ノ部分ノ証明ニ同様ニシテ得ラレル。

③ $Y'^{*'}$ ハ Y ノ点ト 0 カラ張ラレル凸集合 $\text{conv}(Y, 0)$ ノ (functional トシテノ weak topology

(1) Über konvexe Mengen in linearen normierten Räumen. Stud. Math. 4.

=ヨル) 閉被 $\overline{\text{conv}}(Y, 0)$ デアル。又 0 ヲ含ム $\bar{E}$,
 (f. w. t.) 閉凸集合 Y ハ $Y'^* = Y$ ヲ満足スル。

証明. 定義カラ明 $= Y'^* \cong \overline{\text{conv}}(Y, 0)$. ヲツテ
 若シ $f_0 \in Y'^* - \overline{\text{conv}}(Y, 0)$ トスルト, $\varepsilon > 0$ 及ビ x_1 ,
 $x_2, \dots, x_n \in E$ が存在シテ, 凡テ $f \in \overline{\text{conv}}(Y, 0)$
 = 對シテ

$$\max_{1 \leq i \leq n} |f(x_i) - f_0(x_i)| > \varepsilon$$

從ツテ n 次元 ユークリッド空間ノ点 $\xi_0 = (f_0(x_1), f_0(x_2), \dots, f_0(x_n))$
 ハ $\xi_f = (f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n))$,
 $f \in \overline{\text{conv}}(Y, 0)$ ノ何レカラモ距離 $> \varepsilon$. f が $\overline{\text{conv}}(Y, 0)$ ヲ動クトキ ξ_f ハ n 次元ノ空間内テ凸集合ヲ
 作ル. ヲツテ Ascoli-Mazur ノ定理 (有限次元ノ
 場合) デ実數 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ が存在シテ,

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i f_0(x_i) > 1 \text{ 且ツ全テ } f \in \overline{\text{conv}}(Y, 0) = \text{對}$$

$$\text{シテ } \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i) \leq 1. \text{ 其所デ } x_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \in E \text{ ハ明}$$

$= Y'$ ノ点デアル。ヨツテ $f_0 \in Y'^*$ ナル矛盾ヲ得ル。最後
 ノ部分ノ証明ハ同様ニシテ得ラレル。

[4] 上カラ 0 ヲ含ム reg. convex set Y ハ
 X^* ノ形ナルコト及ビ其ノ逆ガワカッタ。又一般ノ reg.
 convex set Y カラ $\text{conv}(Y, 0)$ ヲ作ルト X^* ,
 形ニナル事及ビ其逆モワカッタ。

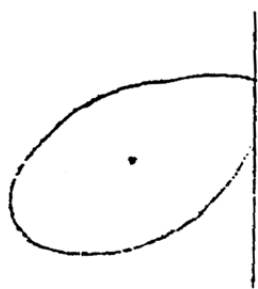
[5] *reg. convex set* X^* が $E =$ 於ケル有界集合ナルコトト, E の (強) 閉凸集合 $X^{*'}$ が 0 を内点ニスルコトトハ同等デアール。

証明. X^* が有界集合ニシテ且ツ $X^{*'}$ が 0 を内点ニシタイトスル. 然ラバ $\|f\| \leq \alpha$ for $f \in X^*$, 且ツ $x_i \in X^{*'} =$ シテ $\lim_{i \rightarrow \infty} \|x_i\| = 0$ ナル数列 $\{x_i\} \subseteq E$ が存在スル: $|f(x_i)| \leq \|f\| \cdot \|x_i\| \leq \alpha \|x_i\|$ カラ之レハ矛盾デアール. 次ニ $X^{*'}$ が球 $\|x\| \leq \beta$, $\beta > 0$ を含ミ, 且ツ X^* が有界集合デタイトスル. 然ラバ $\|x_0\| = \beta$ 且ツ $f_0(x_0) > 1$ or $f_0(x_0) < -1$ ナル $f_0 \in X^*$, $x_0 \in X^{*'}$ が存在スル. $f_0(x_0) > 1$ ノトキハ矛盾ナシ, 又 $f(x_0) < -1$ ノトキハ $f_0(-x_0) > 1$, $x_0 \in X^{*'}$ カラ矛盾デアール.

[6] Krein-Milman の *Studia Math.* 9 (未着) デ, 有界 + *reg. convex set* $K =$ へ *extreme point* が存在スル. 之ヲ証明シテ居ル. $f_0 \in K$ が K の *extreme point* デアルト云フノハ如何ナル $g, h \in K$ ニ對シテモ $f_0 \neq \frac{1}{2}(g+h)$ ナルコトデアール. 之ノ証明ハ「深宮氏」ニヨツテ得ラレタ。(本号深宮氏ノ談話ヲ見ラレタイ). *transfinite induction* ニヨル鮮カナ証明デアール.

所デ若シ E が separable ト假定スルト, Mazur, loc. cit. ニヨリ E ノ原点ヲ内点トスル (強) 閉凸集合 $X^{*'} =$ ハ必ず切超平面が *unique* + *boundary point* が存在スル. 即チ $f_0(x_0) = 1$

且ツ $x \in X^{*'} \text{ デ } f_0(x) \leq 1$ 如キ $f_0 \in \bar{E}$ が唯一ツ
 定マル如キ $x_0 \in X^{*'} \text{ が存在スル。ヨツテ斯ル } f_0 \text{ ハ } \text{reg.} \\
 \text{convex} \rightarrow X^{*'} \text{ の extreme point} = \text{ナツテ。}$
 故カラ reg. convex set が 0 を含ムヤウ = 移動シト
 イテ E separable + 場合ハ Krein-Smulian
 の定理が証明サレタコト = ナル。然レ E separable
 デナイ場合、例ハ Banach 空間 (M) の単位球ノ如
 ク表面上到ル所切超平面が unique = ナラナイ $X^{*'} \text{ が}$
 存在スルカラ、一般ノ場合ハ深宮氏ノ証明サレタヤウナ
 方法デヤラナイトイケナイ様デアアル。深宮氏ノ証明ハ下圖
 ノ如キ切超平面ト求メラレタコト = ナル様デアラウ。(1)



[7] Krein-Smulian, Annals, 論文
 1 第 1 §, 部分ハ上ノ interpretation デ殆ンド
 trivial — 之ハ角谷君ノ手紙(前談話) = 是
 functional トシテ, weak topology デ
 trivial トアリマス。中デ一證難シ相ナ。

$K \in \bar{E}$ が $\text{reg. convex} = \text{ナルタメノ必要條件}$

(1) 兎ニ角 non-separable + 場合ノ証明ハ trans-
 finite + 考ヘガトシテモ必要ト思ハレル。

ハ、 K ト任意ノ有界 *reg. convex set* トノ共通集合
が全テ *reg. convex* ナル事。

ト云フ定理ノ証明等モ上ノ *duality* カラ目ニ見エ
テハ譯デス。